

3656

Bibl. Mont

À Son Excellence

Monsieur

le Baron de Mongelas

Ministre d'état de Sa Majesté le Roi de
Bavière, Chevalier de ses ordres &c &c &c

Seul avec respect
par un des auteurs

J. J. Burmann

Prof. de Math. et de
Neg. Directeur de l'Acad. de commerce
à Mannheim

ÜBER
COMBINATORISCHE
ANALYSIS
UND
DERIVATIONS-CALCUL

EINIGE FRAGMENTE

GESAMMELT

UND ZUM DRUCK BEFÖRDERT

VON

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

*Die Proportionen Burmann'schen Abhandlungen
sind französisch sind, gedruckt von Seite 1 bis 130.*

Leipzig
im Schwickertschen Verlage. 1803.

U E E H

COMBINATORISCHE

ANALYSIS

UND

DERIVATIONS-CALCUL

ERKLAERUNG

Bayerische
Staatsbibliothek
München

UND AM HAUPT KUNSTGEWERBEMUSEUM

1850

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

Leipzig

im Verlage von C. Neumann, Neudamm

D e n beyden

französischen Bürgern

C h r i s t i a n K r a m p

Professor der Chemie und Experimentalphysik bey der
Centralschule zu Kölln

u n d

I o h a n n C a r l B u r c k h a r d t

adjungirten Astronomen

bey dem Längen-Bureau zu Paris

wie auch

dem Professor der Philosophie

H e i n r i c h A u g u s t R o t h e

z u L e i p z i g

den eifrigen Bearbeitern und Beförderern
der combinatorischen Analysis

w i d m e n

d i e s e S a m m l u n g

fragmentarischer

Aufsätze und Abhandlungen

zu Bezeugung

ihrer Freundschaft und Hochachtung

d i e V e r f a s s e r

Vorbericht des Herausgebers.

Die französischen Aufsätze, mit welchen diese Schrift beginnt, sind mir auf mein Ersuchen von ihrem Verfasser, dem Herrn Professor BÜR-
MANN zu Mannheim, zum Einrücken in die dritte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen zugeschickt worden. Da die Ausfertigung der Sammlung voritzt nicht statt haben konnte, so folgen sie hier, um solche dem Publikum nicht länger vorzuenthalten, da sie schon seit geraumer Zeit in meinen Händen sind.

BÜRMANNS Vorhaben, die combinatorische Analysis den Ausländern bekannter zu machen und nachdrücklich zu empfehlen, ist den Lesern jener Sammlungen aus dem Vorberichte zur zweyten bereits bekannt. Die umständliche Ausführung desselben ist einem besondern Werke: *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, vorbehalten, welches sein Verfasser nun bald herauszugeben gedenkt, und wovon hier vorläufig eine ausführliche Inhaltsanzeige mitgetheilt worden ist. Diese, so wie die Aufsätze selbst (sämtlich Bruchstücke des ebengenannten größern

Werks) zeigen deutlich, was und wieviel man sich davon zu versprechen habe.

BÜRMANN's Empfehlung der combinatorischen Methode und ihrer Anwendung auf die Analysis ist von bedeutender Wichtigkeit. Dieser vortreffliche Analyst war nämlich anfangs ganz dawider eingenommen, und sahe die combinatorischen Darstellungen, in Beziehung auf die Analysis, für ein bloßes Spiel des Witzes an, mit welchem sich abzugeben der Mühe nicht lohne. Der Rath eines einsichtsvollen vertraulichen Freundes veranlaßte ihn in der Folge zu einer scharfen Prüfung; die Sache bestand diese Prüfung vollkommen; die Vorurtheile schwanden; die falschen Vorstellungen machten bessern Überzeugungen Platz; und — was den Erfolg jener unpartheyischen Untersuchung von allen Seiten bestätigte und auf immer sicherte — BÜRMANN fand nachher oft Gelegenheit die Methode, bey seinen Vorlesungen praktisch zu prüfen, und ihren Werth und Nutzen durch wirkliche Anwendung zu bewähren. Von der Zeit an glaubte der biedere wackere Mann es der guten Sache schuldig zu seyn, zu schnellerer Bekanntmachung und weiterer Verbreitung dieses neuen Zweiges der Analysis, auch von seiner Seite, vornehmlich durch französische, im Auslande mehr gelesene, Aufsätze mitzuwirken.

BÜRMANN's innige, jedem Kenner sogleich einleuchtende, Bekanntschaft mit dem Gegenstande; sein philosophischer Überblick des Ganzen; die hin und wieder von ihm eingestreuten,

eben so wahr als schön ausgedrückten Bemerkungen, gereichen diesen, obschon fragmentarischen, Aufsätzen, zu vorzüglicher Empfehlung, und machen das Lesen und Studiren derselben anziehend und interessant. Die Hauptabsicht geht dahin: „Die Functionen - Analysis mit der combinatorischen zu verschwistern, beyde in die engste Verbindung mit einander zu setzen, und dabey eine neue, äußerst leichte, beyderley Functionen aufs deutlichste von einander unterscheidende, Bezeichnung einzuführen.“ Es wird nicht überflüssig seyn, einige zerstreute, diese verschwisternde Vereinigung betreffende, Aeußerungen zu sammeln, und mit BÜRMANNS eigenen Worten, in einer freyen Übersetzung, hier aufzuführen:

„Die combinatorische Methode ist eine der wenigen wahrhaft allgemeinen: aus einer geringen Anzahl einfacher Voraussetzungen fließt ein unerschöpflicher Reichthum nützlicher Folgen. Ihr Einfluß auf die Analysis ist besonders wichtig, und erweitert ihren Wirkungskreis ungemein. Die combinatorische Analysis realisirt die Functionalausdrücke auf die möglichst directe Art. Ohne ihre Beyhülfe würden die großen weitläufigen Formeln der letztern nicht selten, den ungeheuern ägyptischen Pyramiden gleich, mehr Anspruch auf unsere Bewunderung als auf unsere Erkenntlichkeit machen; ohne sie würde der Functionalcalcul ein Chaos von Reductionen darstellen, die auch den entschlossensten

„herzhaftesten Rechner ermüden würden. Die
„Differential - Analysis, die seit länger als einem
„Jahrhunderte so viele Wunder gewirkt und her-
„vorgebracht hat, führt geschwind zu Haupt-
„resultaten, welche die combinatorische hinter-
„her weiter bearbeitet und entwickelt. Daher
„die Nothwendigkeit, beyde innigst mit einander
„zu vereinigen; um so mehr, da ihre Trennung
„der einem wie der andern nachtheilig ist. Nur
„dadurch, daß man beyde aufs vollkommenste
„mit einander amalgamirt, kann man den großen
„Methoden die Vollkommenheit geben, deren
„sie fähig sind. Ohne diese Vereinigung gehen,
„wie die Erfahrung lehrt, bey den Evolutionen
„der Functionen in Reihen, und den Involutio-
„nen der Reihen in Functionen, das Gesetz der
„allgemeinen und die Simplicität der summato-
„rischen Glieder gewöhnlich verlohren. Die ein-
„fache Darstellung dieser Glieder von oft sehr
„verwickelten Reihen, gehört mit zu den Vor-
„zügen der combinatorischen Analysis. Bey dem
„directen Wege, auf welchem sie zum Ziele
„gelangt, sind ihre Verfahren nicht weniger
„streng und analytisch als die der Differen-
„tialmethode. Zuweilen vervielfältigt sie die
„Ansichten und Auflösungen, und stellt, in
„schwierigen Fällen, mehrere schätzbare Hülf-
„mittel auf, die dem Geiste, durch das Gefühl
„seiner Kräfte belebt, den Muth einflößen, wei-
„ter zu forschen. Alles beruht dabey auf
„den arithmographischen, lexikographi-
„schen, stelegraphischen Anordnungen;

„auf den — rein - combinatorischen Invo-
 „lutionen und Evolutionen. Diese geben
 „die Grundlage zu einer *Arithmétique universelle*
 „*ordinale*, zu einem *Calcul ordinal* — charakte-
 „ristische Benennungen, die BÜRMANNS der com-
 „binatorischen Analysis neuerlich beygelegt hat;
 „den Zusatz *ordinal* in der ausgedehntesten Be-
 „deutung des Worts, als Beywort von *ordre*,
 „genommen. — Dadurch erhebt sich die com-
 „binatorische Methode mit ihren Ordnungs-
 „gesetzen zu dem Range einer independen-
 „ten Wissenschaft, die aber gleichwohl, bey
 „aller Unabhängigkeit von der gewöhnlichen analy-
 „tischen, ihr keineswegs fremd, sondern vielmehr
 „recht eigentlich dazu qualificirt ist, die engste
 „Verbindung mit ihr einzugehen. Alles löst
 „sich zuletzt in eine sprechende combinato-
 „rische Tachygraphie auf, wo das Auge
 „mit einem Überblick das Ganze mit allen seinen
 „Theilen faßt; der Erfolg einer ausdrucksvollen
 „symbolisch - combinatorischen Zeich-
 „nung, die einem umständlichen verbalen
 „Vortrage allemal weit vorzuziehen ist.“

So viel von BÜRMANNS Aeusserungen über
 die Vereinigung der Functionen - Analysis mit der
 combinatorischen. Anlangend die von ihm da-
 bey einzuführende neue Bezeichnung, so
 muß ich mich auf das in meinem Vorberichte
 zur zweiten Sammlung combinatorisch - analyti-
 scher Abhandlungen und noch ausführlicher hier
 in den Anmerkungen zu BÜRMANNS *Essai de*
caractéristique combinatoire darüber Gesagte beru-

fen. Hier will ich nur so viel erinnern, daß BÜRMANN für seine Zeichen eine solche Einrichtung zu treffen gesucht hat, daß arithmetische, analytische, combinatorische, Ziffern und Zahlen oder Functionen, ohne Zweydeutigkeit und ohne besondere Nachweisung, im Calcul unter einander gemischt, leicht und sicher unterschieden, auch allen analytischen Operationen unterworfen werden können, und so combinatorische Evolutionen, Reversionen, Interpolationen, u. s. w. Differentiationen, Integrationen, sich darstellen lassen. Seine combinatorischen Zeichen z. B. sind sehr einfach und bloß auf die beyden Formen $\neg$ und $[$, mit ihren bestimmten Abzeichen für die nöthigen Modificationen (das erste für die Sätze, das zweyte für ihre combinatorische Bearbeitung) eingeschränkt. Von diesen Zeichen kommt in den Abhandlungen hier nichts vor, weil sie sich mit ihren Abzeichen durch gewöhnliche Typen nicht darstellen ließen; auch muß man nicht vergessen, was BÜRMANN am Schlusse seines *Polynome - Combinatoire* selbst erinnert, daß das, was hier im Drucke an ihrer Stelle steht, nur ein höchst unvollkommenes Surrogat sey, das sich mit jenen viel vollkommnern Zeichen gar nicht messen darf. Inzwischen ist zu rathen, beym Lesen des *Polynome* sich anfänglich die Zeichen und ihre Bedeutungen, so wie sie nach und nach vorkommen, auf ein besonderes Blatt aufzuschreiben, um sie sogleich in der Folge, wo sie

wieder erscheinen, richtig verstehen und auslegen zu können. Etwas Aehnliches gilt von den combinatorischen Operationen und Involutionen, die man am besten mit der Feder in der Hand verfolgt. Das aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut gewählten Beyspiele, sagt BÜRMANN, machen mit den combinatorischen ganz einfachen Regeln und Verfahren weit schneller vertraut, als wenn man es bloß bey den verbalen, noch so aufmerksam durchlesenen, Vorschriften bewenden läßt. Man wird wohl thun, wenn man diese praktische Übung bald in Zahlen, bald in Buchstaben, versucht. Eine geringe Aufmerksamkeit bey einer mehrmaligen Handanlegung, wird die Regeln, oft ohne alle wörtliche Nachweisung, die, um bestimmt zu seyn, nicht immer kurz seyn können, leicht finden lassen. Es ist eine schöne Eigenschaft der combinatorischen Analysis, setzt dieser vortrefliche Beobachter hinzu, aus bloßen combinatorischen Entwürfen und ihrer Anordnung in Tafeln, durch bloße anschauliche Darstellung ihrer Ordnungsgesetze, sich selbst zu lehren.

Meine Anmerkungen zu dem *Essai de caractéristique combinatoire* sind theils erläuternd, theils geben sie weitere Nachweisungen, zuweilen selbst aus BÜRMANN's Briefen. Manches daraus kann auch als Nachweisung beym *Polynome - Combinatoire* gebraucht werden, z. B. wenn man etwas ausführlicher zu wissen verlangte, was es mit der *Involution Lexicographique* (Seite 94) mit der *Involution littéraire directe*

(S. 96) mit der *Involution permutée* (S. 99) für Bewandnis habe; wo man die in meinen Anmerkungen dafür citirten Stellen leicht finden und nachschlagen könnte. BÜRMANNS durfte in diesen Aufsätzen nach seinem Plane nicht anders als kurz seyn und konnte sich daher auf eine detailirte Auseinandersetzung solcher combinatorischer Formen nicht einlassen. Freylich sollten diese Anmerkungen, wie der Aufsatz zu dem sie gehören, französisch geschrieben seyn. Wenn man aber die Schwierigkeiten nicht verkennen kann, die jeden Vortrag in einer fremden Sprache begleiten, in welcher man sich die gehörige Fertigkeit, durch lange anhaltende Übung nicht erworben hat; so wird man es gewiß verzeihlich finden, daß es in gegenwärtigem Falle, und bey einem solchen Texte, nicht geschehen ist.

So viel, von BÜRMANNS Aufsätzen und ihrem Verhalten zu seinem größern *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, der größtentheils den Reihen und ihrer verbesserten Behandlung gewidmet ist.

Einen ähnlichen Vorsatz, durch Erweiterung der Theorie der Functionen und des Differentialcalculus die Analysis der Reihen zu vervollkommen, insbesondere schwere Untersuchungen verwickelter Gegenstände zu erleichtern, weitläuftige, nicht selten sehr beschwerliche dabey vorkommende Operationen und Rechnungen abzukürzen, und verschiedenc Zweige der Analysis mit einander in nähere Verbindung zu bringen, hat ARBOGAST, Mitglied des französischen

Nationalinstituts und Professor der Mathematik zu Strasburg, ohnlängst ausgeführt. Dabey hat er einen eigenen, von allen bisher bekannten ganz verschiedenen, Weg eingeschlagen; wie aus seinem neuerlich (1800) zu Strasburg herausgegebenen schätzbaren und interessanten Werke: *Du Calcul des Dérivations* erhellet. Seine Rechnungsmethode gründet sich auf die durchgängige Voraussetzung, zusammengehörige Gröſsen als von einander derivirend zu betrachten; wobey er zugleich den Begriff von analytischer Derivation erweitert und ihn auf jede willkührlichen, von einander ganz unabhängigen, Gröſsen $a, b, c, d, \dots$ (dergleichen die Coefficienten der Glieder der Reihen darstellen) und ihre verschiedene Zusammensetzung erstreckt, auch solche als veränderlich und von einander derivirend angesehen hat, so unabhängig von einander sie übrigens an sich seyn mögen.

Wie dabey die Glieder der entwickelten Functionen von einander abgeleitet werden; wie z. B. bey Evolution der Function

$$\varphi (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

(wo offenbar das erste Glied $\equiv \varphi \alpha$) die Coefficienten der übrigen, in zusammengesetzten derivirten Gröſsen (*Dérivées*) von $\varphi \alpha$; und diese wieder in einfache von $\varphi \alpha$ und zusammengesetzte von $\beta, \beta^2, \beta^3, \dots$ sich zerlegen; die letztern aber endlich in die ganz einfachen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ und ihre Zusammensetzungen sich auflösen lassen; — dafür will ich das in meinem Aufsatze (hier No. V) darüber Gesagte itzt nicht wieder-

holen. BÜRMANNS consecutiv Functionen $f^1, f^2, \dots f^n$, sind ungefähr das, was ARBOGAST 1^{ste}, 2^{te}, ... n^{te} Derivirte nennt.

Die Evolution der Functionen in Reihen macht die Grundlage des ganzen Werks aus. Der Ursprung und die Anwendung der Derivationen zeigt sich hier am deutlichsten; einzelne Formeln und Sätze davon finden in der Folge durchgängig ihre Anwendung; auch fällt, worinn die combinatorischen und derivativen Verfahren von einander verschieden sind, worinn sie mit einander übereintreffen, nirgends so klar als hier in die Augen. Ein großer Theil meiner Abhandlung ist daher mit Vergleichung der beyderley Methoden beschäftigt. Die dabey vorkommenden derivativen Zeichen habe ich erklärt, die combinatorischen aber als bekannt vorausgesetzt, um so mehr, da selbige schon vorher von BÜRMANN, in seinen Noten zu seinem *Polynome-Combinatoire* aufgeführt und mit den seinigen verglichen worden sind.

Der Derivationscalcul als allgemeine, die Theorie der Functionen (mit welcher er in der innigsten Verbindung steht) so wie die Gränzen der Differentialrechnung (deren er sich als Instrument bedient) erweiternde Methode, ist vortreflich und vielumfassend; die Anwendung dieses Calculs auf mehrere interessante und schwierige Untersuchungen, seine Erstreckung auf Functionen zusammengesetzter Polynomien ist wichtig; — Alles qualificirt das Werk zu einem

ernstlichen Studium jedes Analysten, dem die Erweiterung seiner Wissenschaft am Herzen liegt.

Wenn aber der scharfsinnige, gelehrte und belesene Verfasser desselben, neben dem Lobe, das er der combinatorisch-analytischen Methode in der Vorrede ertheilt, nicht undeutlich zu verstehen giebt, er habe durch den Derivationscalcul die combinatorische Analysis entbehrlich gemacht; wie aus den Worten folgender Stellen — *Les quantités polynomiales peuvent aussi se former par les combinaisons, quoique d'une façon moins facile et moins analytique, que par les Dérivations (Calc. des Dér. p. 4. no. 52) — Je n'ai fait aucun usage des combinaisons — j'ai suivi mes propres idées — les principes que j'emploie sont plus étendus — les procédés que je donne sont plus analytiques, u. s. w. bis zu den Worten pour former les groupes des quantités polynomiales (Préf. p. V. VI) — deutlich hervor- geht: so ist das eine stillschweigende Behauptung, welcher ich laut widersprechen muß. Der Derivationscalcul hebt den wichtigen nützlichen Gebrauch der combinatorischen Methode in der Analysis so wenig auf, daß er ihn vielmehr nachdrücklichst bestätigt.*

Wenn man, um ein sehr einleuchtendes Beyspiel zu geben, das ARBOGASTISCHE Evolutionsverfahren Schritt für Schritt verfolgt, so geht am Ende folgendes Resultat unwidersprechlich hervor:

„Der Derivationscalcul führt anfänglich zu „beschwerlichen continuirlichen Differentiationen

„und Reductionen; wie die Formeln [*Calc. des*
 „*Dér.* no. 5. 7 und 20, 21] mit ihren Anwendun-
 „gen [no. 12, 14, 16] zeigen, und ARBOGAST
 „[no. 19] selbst gesteht. Statt dieser werden in der
 „Folge zwar leichte, dennoch aber in Weitläuf-
 „tigkeit führende Substitutionen in Substitutio-
 „nen (durch successive Entwicklung der Deri-
 „virten von β^m zu Derivirten von γ und deren
 „Potenzen, dieser wieder zu Derivirten von δ
 „und deren Potenzen, u. s. f. bis der derivative
 „Charakter $\mathfrak{D}$ aus allen Gliedern verschwunden
 „ist) gebraucht [no. 22, 25 und p. 20, 21]; Sub-
 „stitutionen, deren sich der Conferenzzrath TE-
 „TENS bereits bedient hat (hier S. 230-235). Diese
 „Derivationen lösen sich zuletzt in ganz leichte
 „und einfache combinatorische Operatio-
 „nen und Involutionen auf; dahin z. B. die
 „*Règles* [no. 30, 36, 43, 47] gehören, aus de-
 „nen vollkommen reducirte gutgeord-
 „nete Complexionen, in eben der Folge auf ein-
 „ander, wie bey mir, hervorgehen [die *Dévelop-*
 „*pemens réduits*, p. 21]. Die analytischen
 „Derivationen führen also hier (und eben so
 „auch bey den Producten der Reihen und
 „andern Fällen), ganz unerwartet auf com-
 „binatorische Anordnungen und Verfah-
 „ren. [Diese] sind also unentbehrlich, will man
 „anders die endlichen Resultate mit absoluter
 „Leichtigkeit herbeyführen. Merkwürdig ist es
 „übrigens, daß man auf sie geleitet wird, indem
 „man die Schwierigkeiten, welche die derivati-
 „ven Ausdrücke und Verfahren bey den *quantités*

„*polynomiales* in den Weg legen, zu heben sucht, „und indem man, was diese noch eingewickelt „enthalten, nach und nach entwickelt.“

Das Verfahren [no. 21] zeigt die Abhängigkeit der dortigen Evolutionsformel von dem polynomischen Lehrsatz. Nachdem nun für die Glieder dieses Satzes die derivativen oder meine combinatorischen Ausdrücke gebraucht werden, nachdem ist auch jene Formel im Ausdrücke verschieden. Begreiflich hat ARBOGAST seine derivativen Functionen substituirt; aber hoffentlich wird man keinen Augenblick anstehen, die geschmeidigere combinatorische Formel (hier S. 203) im Gebrauche vorzuziehen.

Die combinatorischen Operationen und Involutionsen sind überdies, wie ohne Schwierigkeit von selbst einleuchtet, wahre Derivationen, im strengsten Sinne des Worts, die, wie die analytischen, von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen; aber Derivationen der einfachsten Art. Wenn man nämlich in einem analytischen Ausdrücke oder Satze alles entwickelt, auflöst, und vereinfacht, was sich entwickeln, auflösen und vereinfachen läßt: so verfällt man zuletzt nicht selten auf ganz simple, gewöhnlich combinatorische, Anordnungen und Derivationen; und das um so leichter und zuverlässiger, wenn man etwa zufälligerweise eine der (hier, S. 189, 190, Note 0) erwähnten, dahin führenden, Zeichnungen, besonders die bezifferte, gebraucht hätte, deren sich vorlängst mehrere Analysten bedient

haben, ohne den Übergang zu kennen, oder auch nur zu ahnden, der von hier aus in die combinatorischen Anordnungen offen steht. Was Prof. PFAFF (Arch. der Math. H. VII. S. 348) von dem TETENSCHEN Substitutionsverfahren sagt, es involvire etwas, den beym Combiniren erforderlichen Operationen Ähnliches, das erst noch weiter evolvirt werden müsse; das wird durch die analytischen Derivationen vollkommen bestätigt. Das letzte Resultat derselben (die *Développemens réduits*) sind combinatorische Derivationen in aller Form. Auf diese geräth die derivative Methode nur allmählig und auf Umwegen; die combinatorische bemächtigt sich ihrer auf dem kürzesten ganz directen Wege.

So weit auch ARBOGAST das Gebiet seiner Derivationen erstreckt und ausgedehnt, und sich dadurch ein gegründetes Recht auf den Dank aller Analysten erworben hat: so wird es doch immer, wie bey den, in meiner Abhandlung in Betrachtung gezogenen, so auch in andern Fällen, Bedürfnis bleiben, für die analytischen verwickelten Derivationen, die correspondirenden combinatorischen leichtern aufzusuchen und in Formeln darzustellen, deren lichtvolle symbolische Zeichnung allemal mehr Deutlichkeit haben wird, als die verbalen Vorträge der Regeln für jene nicht haben können. Wie die Differentialanalysis, nach BÜRMANNS obiger Bemerkung, zu Hauptresultaten führt, welche die combinatorische nachher weiter bearbeitet und entwickelt;

so auch der Derivationscalcul, eine erweiterte Anwendung der Differentialrechnung. Die analytischen Derivationen sind, wie die Vergleichung zeigt, combinatorischer Art (*Combinaisons latentes*). ARBOGAST hat nämlich in seinem derivativen Verfahren, ohne vielleicht daran zu denken, eine vielbefassende, auf den Differentialcalcul gegründete, und dadurch mit der Theorie der Functionen zusammenhängende, COMBINATORIK aufgestellt. Vortrefflich zeigt diese den Weg, auf welchem man die Untersuchungen einleiten und zu Endresultaten gelangen kann. Aber auf jenem durch labyrinthische Gänge oft so sehr verflochtenen Wege, bey diesen nicht selten äußerst verwickelten Resultaten, werden, um jenen zu verfolgen und diese zu realisiren, combinatorische Wegweiser und Vermittler der einfachsten Art, wenn man sie haben kann, theils als sicheres Geleite zu besserem Fortkommen, theils als erwünschte Abkürzung und Vereinfachung, allemal von größtem Nutzen seyn.

Wenn nun aber die Derivationsmethode der Beyhülfe der combinatorischen, ohne Unbequemlichkeit, nicht entbehren kann; wenn selbst letztere die geschwindere Übersicht der erstern ungemein befördert, und zu deutlicherer Einsicht in ihre Verfahren verhilft, wie jeder zugeben wird, den die Erfahrung darüber belehrt hat; so ist klar, was ich oben behauptet habe: „dafs der „Derivationscalcul die combinatorische Analysis, „mit ihren Involutionen und Evolutionen, so wenig entbehrlich macht, dafs er vielmehr ihren

„herrlichen Nutzen aufs neue kräftigst bestätigt.“ Den Einfluß der, in ihren Gründen so einfachen, in ihrer Anwendung so leichten, Combinationslehre auf die Analysis wieder aufheben; die bereits getroffene so wohlthätige innige Vereinigung beyder, nach welcher jene dieser, von ihren ersten Anfängen an bis in die größten Verwickelungen hinein, schwesterlich zur Seite geht, und ihr hülfreich die Hand bietet — diesen Einfluß wieder aufheben, diese Vereinigung wieder trennen wollen — das hiesse, eine der lautersten, ergiebigsten Hülfquellen für die Analysis vorsetzlich verstopfen, und in sehr vielen Fällen den kürzesten, nur allein durch directe combinato-
rische Verfahren (*Combinaisons manifestes*) zugänglichen Weg sich verschließen.

Nicht also die Trennung der combinatorischen Methode von der differentiellen und derivativen, sondern vielmehr ihre möglichst genaue und innige Vereinigung, kann der Analysis wahrhaft nützlich seyn und ihre Grenzen erweitern. Diese Vereinigung beabsichtigt BÜRMANNS *Traité d'Analyse fonctionnaire - combinatoire*, nach der ausdrücklichen Erklärung die dieser scharfsinnige Analyst gleich zu Anfange seines *Développement général aux Fonctions arbitraires* (hier No. II) darüber gegeben hat.

Leipzig im April 1803.

Carl Friedrich Hindenburg.

I.
E S S A I
DE
CARACTERISTIQUE COMBINATOIRE
O U
NOTATION UNIVERSELLE D'ÉLÉMENTS
SIMPLES SYSTEMATIQUEMENT COMBINÉS.

. ambagesque resolvit
Caeca regens filo vestigia
Enéide, chant VI.

P A R B U R M A N E.

P R E F A C E.

Cet opuscule a pour but de rendre la communication des idées plus rapide et plus générale. S'il produit seulement des recherches dans une partie assez neuve encore, l'Art de la Notation, je ne regretterai pas les années, que j'ai employées à des pages.

Le titre que j'ai adopté est celui que LEIBNITZ ¹⁾ donnait à un algèbre de raisonnement dont il parla toujours et ne publia rien. Ma Caractéristique, moins étendue en plan que celle de cet homme illustre, n'a point la métaphysique pour base: mais comme écriture immédiate des sciences du géomètre et du grammairien philosophe, elle est aussi une langue universelle, ou susceptible de le devenir. Elle se distingue de la Pasi-graphie parisienne par son économie mathématique non moins que par sa brièveté.

Ses élémens graphiques sont . — | ∨ () ∩ ∪

¹⁾ Les Notes du Texte se trouvent amassées séparément au Nro. IV.

Rendre saillantes les nombreuses parties de la Caractéristique sans qu'elles cessent de faire un tout contenu, assigner à chaque chose un signe simple sans tomber dans la répétition, embrasser les besoins présens et futurs, ne pas sacrifier l'élégance des formes à leur facilité pratique; ces points de mire si différens ont rendu ma carrière trop difficile pour que je n'y ai pas trébuché. J'en invoque l'indulgence des connaisseurs sur des imperfections inévitables peut-être pour de plus habiles que moi, et je les prie de ne juger qu'un Essai,

Oserai-je compter généralement sur une lecture attentive? Je ne l'espère pas de ceux qui ne parcourent les livres que pour en relever les endroits faibles et qui croient mieux mériter du public en se moquant de tout projet utile qu'en contribuant à son exécution. La meilleure manière de critiquer ici et partout est de fournir des améliorations et de proposer des vues nouvelles: celle-là seule obtient la reconnaissance de la postérité qui ensevelit dans l'oubli ou le mépris les censures stériles et leurs auteurs.

FONTENELLE dit au sujet de la Caractéristique de LEIBNITZ qu'outre l'art de la trouver, il eût encore fallu le plus difficile de la faire recevoir, les hommes ne s'accordant qu'à n'entendre point leurs intérêts communs. Ces obstacles sont grands mais l'existence de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de la Musique et de l'écriture chinoise prouve qu'ils ne sont pas invincibles. J'y appelle les efforts des jeunes savans dont le courage ne fixe que le terme et dont l'esprit n'est pas encore courbé sous le joug de l'habitude. Dans l'âge mûr, je le sens trop par moi-même, ce qu'on sait est toujours préférable à ce qu'il faut apprendre, fût-il au fond cent fois plus aisé.

TABLE DES MATIÈRES

Première Partie

en impression avec deux planches.

PROLEGOMÈNES DE CARACTÉRISTIQUE.

- | | | |
|-----------------|----------|---|
| 1 ^{re} | Section. | Sur les chiffres, écriture de l'Arithmétique. |
| 2 ^{de} | — | Sur les notes, écriture de la Musique. |
| 3 ^{me} | — | Sur l'Algèbre, écriture de l'Analyse mathématique. |
| 4 ^{me} | — | Sur les figures de la Géométrie et de la Mécanique. |
| 5 ^{me} | — | Sur la Science des Combinaisons appliquée aux mathématiques. ²⁾ |
| 6 ^{me} | — | Sur la même appliquée aux autres sciences par l'Idéographie. |
| 7 ^{me} | — | Sur les caractères plus ou moins arbitraires de la Géographie, de l'Astronomie, et de la Chymie, sur ceux de la Tactique et de la Danse, sur le télégraphe et les signaux en général. |
-

Seconde Partie

toute gravée.

NOTATION COMBINATOIRE.

- | | | |
|-----------------|----------|---|
| 1 ^{re} | Section. | Principes généraux d'Algèbre. ³⁾ |
| 2 ^{de} | — | Application aux Différences directes et inverses. |
| 3 ^{me} | — | Application aux Différences nulles ou différentielles. |
| 4 ^{me} | — | Application aux Intégrales différentielles de tous les ordres, simples et partielles. |
| 5 ^{me} | — | Application aux Sommations conversionnelles. |

- 6^{me} Section. Application aux équations fonctionnaires.
 7^{me} — Application aux formules de Mécanique
 en signes permanens.
 8^{me} — Plan général d'une Idéographie univer-
 selle, médiatement et immédiatement
 parlable.
-

Troisième Partie

en impression avec plusieurs planches.

M Ê L A N G E S

- 1^{re} Section. Résolution numérique (praticable) des
 équations de toute espèce.
 2^{de} — Remarque sur les parties précédentes et
 additions.
 3^{me} — Instruction pour graver bientôt l'écriture
 à l'eau forte, seul moyen de perfection-
 ner la Caractéristique combinatoire.

Planches. Figures combinatoires et autres. Modèles
 des instrumens et appareils du graveur à
 l'eau forte. Modèles droits et renversés
 d'écriture anglo française et d'allemande,
 tant courante que gothique, etc.

A) PREMIERE PARTIE

Section cinquième.

Sur la Science Combinatoire appliquée aux mathématiques et réduite en règles techniques au moyen de l'Analyse Combinatoire.

Quoique la Géométrie, l'Analyse et la Méchanique aient, dans la contemplation de la vérité, une beauté intrinsèque qui en rend l'étude recommandable indépendamment de leur utilité pratique, il n'en est pas moins vrai que ce dernier but doit être celui de tout géomètre spéculateur. Les mathématiques sont assez avancées, mais non leurs applications, disait un philosophe spirituel du dernier siècle. Sa remarque est juste à cela près que les applications demeureront toujours bornées tant que les méthodes ne seront point parfaitement générales et leurs énoncés des formes simples et parlantes. Cette réduction analytico-caractéristique peut seule convertir en règles techniques l'art d'inventer, et mettre pour ainsi dire, le génie à la portée de la multitude.

A mesure que le géomètre physicien attaque des problèmes plus importans, la complication des développemens augmente davantage, au point souvent de rendre la solution finale impossible. Pour éluder cet obstacle invincible directement, la sagacité mathématique a successivement inventé divers modes abrégés : tel est en gros le calcul différentiel et en particulier la notation plus ou moins féconde de certaines fonctions consécutives. Mais osons le dire, cette tachygraphie algébrique ne devient universellement utile qu'à l'aide de l'Analyse Combinatoire qui réalise de la manière la plus directe les énoncés fonctionnaires. Sans elle les grandes

formules sont trop souvent dans le cas des pyramides égyptiennes, des monumens prodigieux qui ont plus de droit à l'admiration qu'à la reconnaissance.

Si un art date de ses premiers essais, l'Analyse Combinatoire est ancienne: si, comme il est plus naturel, on fixe son origine à l'époque où elle a commencé de devenir un système, on ne peut pas remonter plus haut qu'à LEIBNITZ. Ce génie transcendant, à qui nous devons tant de grandes vues, tenta le premier d'en faire une science et même une science universelle. Pour avoir trop étendu son plan, le philosophe allemand occupé d'ailleurs d'une foule d'autres objets, ne fit que peu de progrès dans sa Combinatoire et ne vit même qu'un abyme dans une de ses principales opérations, la décomposition d'un nombre en toutes ses parties entières. 4) Il défricha le champ et c'est beaucoup. Les heureuses idées qu'il sēma fructifièrent sous de géomètres plus modérés. BERNOULLI, MOIVRE, BOSCOWICH, etc. débrouillèrent le cahos et l'abyme disparut. Mais personne n'a autant mérité ici que le Professeur HINDENBURG à Leipsic: en convertissant les procédés combinatoires en règles techniques aussi précises et même plus faciles que celle de l'arithmétique vulgaire, en les illustrant par de nombreuses applications, et en formant une quantité de disciples distingués, ce profond géomètre doit être regardé comme le vrai père de l'Analyse Combinatoire.

En glanant sur ses pas je n'ai guère trouvé que la forme à perfectionner, ou pour mieux dire, à traduire en faveur de ceux qui n'ont point l'usage des lettres allemandes auxquelles nécessiterent la multitude des élémens et l'impression commune. Ma notation nouvelle a sous ce rapport au moins l'approbation de HINDENBURG lui-même. Voyez sa *Zweite Sammlung combinatorisch - analytischer Abhandlungen*.

gen, Leipsic, 1800. ⁵⁾ Comme la manière dont je suis venu à ce travail peut intéresser la science en montrant combien il faut être sur ses gardes lorsqu'on juge des méthodes qu'on ne connaît qu'imparfaitement, je me permettrai quelque détail.

Ainsi que beaucoup de géomètres j'eûs longtems pour l'Analyse Combinatoire allemande une aversion qui alla jusqu'à n'en vouloir lire aucun ouvrage. ⁶⁾ Sur le conseil d'un savant ami je me familiarisai enfin avec elle et vis à ma surprise que j'avais eu tort de la mépriser sur la foi d'autrui. Pour réparer ma faute et guerir d'autres de la même prévention, je résolus d'écrire des Elémens Combinatoires français. ⁷⁾ Je m'ouvris à ce sujet il y a quelques années au Professeur HINDENBOURG qui s'empressa avec une complaisance vraiment rare de m'aider de ses lumières. Dans une correspondance suivie que nous eûmes ensemble il me donna des renseignemens précieux sur sa méthode et sur les meilleurs ouvrages combinatoires, et il y joignit la politesse de m'en envoyer une grande partie: il fit plus, il me redressa amicalement plusieurs méprises, et c'est à sa judicieuse censure que je dois des progrès que je puis avoir faits dans la Science des Combinaisons, dont cette Caractéristique n'est pas le seul résultat. Je me plais à lui en exprimer ici ma reconnaissance publique.

Mon illustre correspondant ne goûta pas tout de suite mon projet d'une notation sans lettres allemandes trop peu connues, à l'avis de plusieurs savans respectables, en France et dans tout le midi de l'Europe. Même en Angleterre et en Batavie, l'Alphabet gothique (Black Letter) confiné aux estampes et à quelques livres de religion, diffère assez de l'imprimé allemand pour que celui ci n'y soit pas d'une lecture aisée. Une circonspection nécessaire dans les correspondances des gens de lettres m'ayant empêché de donner à mes raisons

tout le poids que j'aurais pû, je ne m'étonne aucunement qu'elles n'aient pas convaincu HINDENBOURG. Encore dans le livre cité il paraît douter à son désavantage que la notation n'ait empêché son élégante méthode d'être étudiée des étrangers autant qu'elle le mérite, et il cite contre moi le grand EULER ⁸⁾ dont les ouvrages classiques pleins de lettres allemandes doivent les avoir rendues familières aux géomètres meridionnaux. Mais en admettant, ce qui est beaucoup, cette supposition entière, la simple lecture n'aura pas appris à tracer des caractères très difficiles par les bouts brisés des minuscules et les ornemens sinueux des majuscules qu'un français ou un italien ne sait point distinguer de la lettre proprement dite. Excepté les maîtres écrivains les allemands eux mêmes ne savent pas exécuter ce type d'impression dit *Fraktur*: s'ils y suppléent par une main courante commode, les étrangers, privés de cette ressource, n'ont que la très précaire de se créer de signes particuliers. Or je sais par expérience combien cette difficulté dégoûte, et c'est pour la lever en général que j'ai entrepris cette Caractéristique Combinatoire dont le but, ou du moins le vœu, est d'universaliser les connaissances européennes en facilitant leur communication immédiate.

La guerre et des circonstances qui n'intéressent que moi seul, ont interrompu ma correspondance avec HINDENBOURG et m'ont fait remettre à des tems plus heureux pour les sciences la publication du *Traité d'Analyse Combinatoire* pour lequel j'ai travaillé des matériaux. Je me borne ici à essayer le gout du public mathématicien par des élémens proportionnés aux autres parties de ma Caractéristique et suffisans pourtant pour familiariser avec la méthode: ils contiennent ⁹⁾

1. La combinaison arithmétique des séries, laquelle construit pour un problème quelconque de déve-

loppement la Norme du terme - général, c'est à dire l'énoncé tachygraphique des règles combinatoires fondamentales dont le résultat exprime le terme général dans toute la simplicité possible.

2. La démonstration courte et rigoureuse des règles combinatoires fondamentales, avec des applications choisies qu'il suffit de copier quelques fois pour avoir la routine de ces règles.

3. Le Polynome - Combinatoire (Polynomial-Satz)¹⁰) ce superbe théorème, dû à HINDENBOURG, est comme l'a très bien remarqué le savant Professeur KLÜGEL, une espèce d'observatoire d'où le calculateur suit, au loin, sans jamais la perdre, la loi des développemens et renveloppemens.

4. Involutions lexicographiques appliquées aux Retours des séries, au logarithme naturel de l'infinitinome et au nombre dont l'infinitinome est le logarithme; détermination médiate et immédiate du terme général d'une suite récurrente donnée.

5. Application à quelques uns de nos énoncés différentiels, etc.

6. (Dans la troisième partie de cette Caractéristique) Notice de travaux combinatoires de HINDENBOURG, ESCHENBACH, ROTHE, BURCKHARD, PRASSE, KRAMP, des frères PFAFF, etc., etc.¹¹). Table comparative des signes combinatoires allemands et des miens,¹²) en faveur de ceux qui auront appris l'Analyse Combinatoire dans ma notation. Quand on est au fait du fond, on l'est bientôt de chaque nouvelle forme.

J'ai exposé les raisons qui m'ont empêché d'admettre les lettres allemandes: elles n'auraient d'ailleurs osé trouver place dans une Caractéristique sans lettres proprement dites. Mais tout en m'écartant de la notation de HINDENBOURG, je lui dois l'éloge qu'elle est ce qu'on saurait construire de plus méthodique avec les alphabets.

Les avantages de la mienne dérivent absolument de la pleine liberté que j'ai eue en fait de signes, moyennant quoi j'ai pu rendre les termes généraux combinatoires avec plus d'unité et mieux les distinguer des fonctions analytiques ordinaires avec lesquelles on peut les mêler sans équivoque. ¹³⁾ Deux symboles, — pour les énoncés et [pour les règles combinatoires, remplacent à l'aide des chiffres algébriques $V X \Lambda$ et de quelques modifications locales, les dix alphabets de la notation allemande. ¹⁴⁾ Par une suite de mes principes caractéristiques la terminologie a essuyé la même réduction.

Malgré cette simplification je suis loin de croire que ma notation abolira son modèle, même dans la supposition qu'un éditeur en fit exécuter des types mobiles. Dans l'empire des lettres les révolutions sont rares et surtout lentes en matière de forme. Les plus mauvaises orthographes, par exemple l'anglaise et la française, ont résisté à tous les projets par leur seule force d'inertie, c'est à dire parce qu'on y est une fois accoutumé. A plus forte raison un système savamment régulier en types existans, se soutiendra - t - il dans les pays où il est reçu. Tout ce qui pourra arriver sera que ma notation subsiste à côté de l'allemande, ¹⁵⁾ si tant est qu'on l'adopte. Le $\dot{x}$ de NEWTON n'a nulle part dépassé le dx de LEIBNITZ moins élégant peut-être. Si en Angleterre, où le patriotisme s'étend trop souvent jusqu'aux sciences, on préfère le symbole Newtonien, la France, l'Italie, l'Espagne, l'Allemagne et le Nord se sont déclarés pour LEIBNITZ, leur maître commun en calcul différentiel. En Batavie où les muses sont cosmopolites comme le commerce, l'une et l'autre notation sont en usage et on s'en trouve bien. Il est bon peut-être aujourd'hui de différer, peut-être même de disputer sur ces accessoires: s'entend de manière que

le public en retire de l'utilité et que les parties ne sortent point de l'urbanité philanthropique, qui doit caractériser les lettres. Sous ce point de vue ma notation pourra aussi en Allemagne propager le goût de l'Analyse Combinatoire. On comparera, on scrutera, et les nouvelles idées qui en résulteront, tourneront au profit de la science et à l'honneur des inventeurs. *Fungar vice cotis.*

Mes formes combinatoires étant, comme mes formes algébriques ordinaires, toutes en lignes droites assemblées sous les angles les plus simples, elles exigent de même peu de dextérité manuelle, et leur construction sévèrement méthodique qui les rapproche des fonctions communes sans qu'on puisse jamais les confondre avec elles, n'oblige à aucun effort de mémoire et d'attention. C'est pour soulager encore plus celles-ci que j'ai abandonné les nombreuses dénominations de LEIBNITZ et de BERNOULLI.¹⁶). Les amateurs d'érudition pouvant recourir aux sources, n'ont pas à s'en plaindre et les commençans m'en sauront certainement gré. Dans l'étendue actuelle de l'Analyse et des sciences en général, on ne peut trop réduire pour eux. Au reste je n'ai constamment substitué que des mots plus intelligibles immédiatement et j'ai soigneusement évité d'en employer aucun dans un sens différent de mes prédécesseurs. Avec cette précaution il n'y a pas de confusion à craindre. Je passe à des considérations moins stériles.

L'Analyse Combinatoire ne s'exerce que sur les développemens. C'est à dire sur les séries: mais le domaine de celui-ci est bien plus étendu qu'il ne paraît au premier abord et presque tout s'y rapporte. Excepté quelques fractions simples, les autres ne s'emploient qu'en développement. Il y a plus, en Arithmétique même tout est série. Les nombres entiers sont des séries or-

données selon les puissances de dix, ¹⁷) une fraction est une série pareille d'une partie de l'unité. Les règles arithmétiques fondamentales n'étant que la numération considérée sous diverses faces, ne sont donc que l'art de trouver les séries décimales entières ou fractionnaires qui résultent de compositions et de décompositions prescrites de séries de même espèce.

L'Analyse algébrique est la logique qui conclut les procédés propres à déterminer une quantité au moyen d'autres, liées par certaines conditions. En Arithmétique ces procédés sont l'addition, la soustraction et leurs répétés; en Géométrie ce sont des lignes, des surfaces, des solides à construire; en Mécanique il y entre de plus le tems, le mouvement et ses conséquences. Les autres sciences mathématiques ne sont que des applications de celle-là: l'Analyse est le guide de toutes et l'Algèbre est leur écriture commune. Quelques symboles qu'on employe pour la Norme des opérations techniques qui résolvent le problème, chiffres, lettres, figures réelles ou de convention, cette norme sera dans notre sens toujours de l'Algèbre: ¹⁸) mais une tachygraphie combinatoire dont l'oeil saisit à la fois toutes les parties, est bien préférable à un long enoncé en langue vulgaire qui n'est pourtant jamais que de l'algèbre traduite. Je remarque en passant que d'après cet éclaircissement la langue batave a seule un nom convenable pour algèbre ou plutôt pour Analyse: *Stellkonst*, l'art de construire la norme de résolution. L'espagnol *Algebra*, dérivé de l'arabe et signifiant, fraction; l'italien *Cosa* ou *Cossa*, sousentendu *maravigliosa*, la chose merveilleuse; l'allemand *Buchstabenrechnung*, calcul littéral, ne présentent que des idées imparfaites ou fausses. Comme elles deviennent justes en y attachant le sens convenable, je ne m'y arrêterai pas davantage.

MACHIN a déjà observé qu'au fond toute quantité algébrique est numérique. En effet l'Analyse mathématique opère, non sur les choses elles-mêmes, mais sur leurs rapports de grandeur qui sont évidemment des nombres. Reciproquement tout nombre peut se représenter par une ligne, une surface, un solide, une force, un tems, etc.; enfin par une chose quelconque comparée à une autre chose de même espèce, et chaque fonction numérique est, comme on sait, évaluable ainsi par construction. Les opérations arithmétiques étant cependant, par la nature de nos moyens, susceptibles en pratique d'une précision incomparablement plus grande que celle des opérations géométriques et mécaniques, les géomètres modernes préfèrent dans les cas compliqués, les approximations numériques aux constructions mentalement rigoureuses et réellement inutiles de leurs prédécesseurs. Cette révolution dans la manière de voir a converti, pour ainsi dire, l'Analyse en la science des développemens virtuellement combinatoire dans ses procédés. Après les prodiges de l'Astronomie moderne, le dégoût des approximations a cessé chez les trop religieux admirateurs des anciens: ¹⁹) on s'est enfin apperçu qu'on disputait sur des mots et que $\sqrt{2}$, ou une ligne qui représente ce radical, n'est dans l'usage pas plus exact qu'une série convergente dont chaque coefficient est suffisamment approché, $a^{\frac{m}{n}}$, $\log b$, $\sin C$, $\text{Arc. tang } Z$, etc. comme formes simples et faciles par les tables, se considèrent déjà comme rigoureuses, et on peut leur assimiler chaque autre fonction réellement approximable à volonté. L'abus du terme Exactitude mathématique a duré trop long-tems: encore de nos jours il s'est trouvé des auteurs qui ont rejeté les résultats rigoureux obtenus par le calcul dit infinitésimal, parce qu'ils le

supposaient une méthode approximative: on a nommé géométrique une courbe à points singuliers joints au hasard à la main, et on a refusé cette épithète à la courbe tracée d'un mouvement continu. La science par excellence n'aurait pas dû connaître des logomachies. En est-elle aujourd'hui entièrement exempte? La réponse à cette question m'écarterait trop de l'Analyse Combinatoire où mon sujet me rappelle.

La Science des Combinaisons peut se diviser en deux grandes branches que je distinguerai par les noms de Combinatoire mathématique et de Combinatoire métaphysique en restreignant la valeur de ce mot aux notions incontestées que nous avons des choses, ou plutôt de leurs rapports de qualité. La seconde branche, à beaucoup près la plus étendue, fera la matière d'une section à part. ²⁰)

La Combinatoire mathématique, ou l'Analyse Combinatoire des rapports de quantité, est celle dont j'ai parlé jusques ici: elle a pour tâche de Réaliser une Norme quelconque de la manière la plus praticable. J'étends ici la signification de Norme à tout d'énoncés de calcul ou de construction qu'on veut. Les deux problèmes suivans peuvent en donner une idée plus précise. $f, F, \overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}$ etc. annoncent des fonctions arbitraires des variables qu'elles précèdent.

1. Trouver Fx au moyen des conditions $\overset{1}{F}(\Lambda, X, V) = 0; \overset{2}{F}(\Lambda, X, V) = 0; \overset{3}{F}(\Lambda, X, V) = 0$

2. Dans $fV = A + BFV + CF^2V + DF^3V + \text{etc.}$ déterminer les coefficients $A, B, C, \text{etc.}$; F^2 est ici $F(Fx)$ la fonction de la même fonction de V ; ainsi des autres. Pour cette série, la plus générale qu'on ait encore imaginée, il ne faut absolument que l'Analyse Combinatoire, et pour le Retour par élimination elle seule rend les fonctions différentielles d'une uti-

lité pratique. Dans chaque problème de développement elle ne demande que le tems nécessaire à écrire les termes. ²¹) On ne saurait raisonnablement prétendre davantage. La prolixité éventuelle des opérations, dépendant en entier de la structure des fonctions données, ne peut retomber sur la méthode. Le chemin rectiligne, s'il est long, n'en est pas moins le plus court possible.

J'observe ici que le calcul des différences directes et inverses étant au fond également combinatoire, on aurait tort de ne pas l'employer aux simplifications préalables, lorsqu'il s'y prête. Séparer l'Analyse différentielle de la Combinatoire est nuire à l'une et à l'autre. Ce n'est même qu'en les amalgamant complètement qu'on pourra donner aux grandes méthodes la perfection dont elles sont susceptibles. Sans cette reunion, le développement des fonctions en séries et le renveloppement des séries en fonctions feront souvent perdre ou la loi des termes généraux ou la simplicité des termes sommatoires.

En nommant exacte toute fonction dont la partie négligé est insensible en pratique, chaque série peut se renvelopper exactement par les méthodes exposées dans la seconde partie de cette Caractéristique. Il s'ensuit qu'un problème rappelé aux expressions

$$\sum^m y \Delta x^m, \quad \sum^m \sum^n (z \Delta x^m \cdot \Delta y^n), \text{ etc.}$$

est parfaitement résoluble. Les combinaisons sont ici dans leur empire et ne laissent rien à désirer.

Une partie plus épineuse est l'Interpolation générale; c'est à dire:

Étant donné $f^{\Delta V}$ pour chaque valeur entière de Δ , évaluer cette fonction consécutive pour Δ fractionnaire. Le développement en puissances ascendantes de Δ conduit chez moi à un Retour de fonction différentielle dont les Combinaisons elles-mêmes ne

viennent que difficilement à bout. Ici surtout l'on peut dire que l'Analyse est encore au berceau. Nous manquons absolument de méthode pour évaluer *praticable-*

ment des expressions de la forme $\frac{d^{\frac{x}{2}} x}{d x^{\frac{1}{2}}}$, $L^{\frac{x}{2}} 1$, où je

suppose $L^2 1 = \log. \log 1$, etc. L'importance d'une solution générale du problème dans quantité de recherches qui intéressent le système du monde et les probabilités supérieures, fait souhaiter que les Géomètres y dirigent leurs efforts: par sa difficulté la tâche est digne des plus habiles. Nous avons déjà de profondes recherches sur l'interpolation, mais elles ne sont que partielles. EULER ouvrit la carrière dans son Calcul Différentiel et KRAMP l'étendit naguère considérablement dans son excellente Analyse des Réfractions où l'invention brille de toutes parts: le grand ouvrage d'ARBOGAST si longtemps attendu et que je regrette de ne pas encore posséder, donnera sans doute ici de nouvelles vues dignes de la sagacité de son auteur. ²²) Si elles rendent inutiles mes recherches en ce genre, je supprimerai avec plaisir des essais dont je ne suis à beaucoup près pas content. Ce que je puis assurer, c'est que sans l'Analyse Combinatoire on ne résoudra que rarement cette équation fonctionnaire dont dépend le problème:

$$F f x = \frac{d f x}{d x} F x. \quad \text{Ici } f x \text{ est une fonction donnée de } x \text{ et } F x \text{ est la fonction à déterminer.}$$

Je reprens les séries. La manière de les considérer comme des développemens toujours renveloppables d'une fonction a divers avantages: elle écarte, au moins pour les commençans, la notion d'infini trop vague pour n'être pas pour eux une source des paralogismes. Communément on n'entend par série qu'une suite de termes dont on prend la somme arithmétique: Si cette forme

est le plus souvent préférable, il en est pourtant d'autres qui menent dans certains cas plus rapidement au but. Telle fonction rébelle à un développement se plie sans peine à un autre. La tangente qui a une loi fort compliquée en puissances de l'Angle, on obtient une élégante en série continue:

$$\text{tang } x = \frac{x}{1 -} \frac{x^2}{3 -} \frac{x^2}{5 -} \frac{x^2}{7 -} \text{ etc.}$$

en écrivant pour plus de commodité les fractions successives en ligne horizontale. ²³⁾ Au contraire $\sin x$ se complique en fraction continue, tandis que sa série vulgaire est aussi simple qu'on peut le désirer.

Les fractions continues dont EULER, LAGRANGE, et d'autres grands géomètres ont fait voir l'extrême utilité sont encore pour l'Analyse Combinatoire une des mines les plus riches: l'exploitation peut se réduire à ces trois problèmes:

1. Changer une fonction en fractions continues à numérateurs de la variable.

$$P: E: \Sigma^n X = \frac{x^n}{a +} \frac{x^r}{b +} \frac{x^s}{c +} \text{ etc.}$$

2. La fraction générale étant donnée, trouver la fraction sommatoire réduite à sa moindre expression.

$$P: E: \frac{1^2}{1^2 +} \frac{2^2}{3 \cdot 2^2 +} \frac{3^2}{5 \cdot 3^2 +} \text{ etc. L'Analyse différentielle préside ici à la combinatoire.}$$

3. Étant donné $X = 0$, exprimer Y, autre fonction de x , en fonction continue d'une arbitraire.

$$P: E: \text{De } \frac{x^n}{a +} \frac{x^r}{b +} \frac{x^s}{c +} \text{ etc.} = z,$$

conclure $x^m = \frac{z^{\frac{m}{n}}}{A +} \frac{z^t}{B +} \frac{z^u}{C +}$ etc. Le cas le plus particulier de cet exemple prouvera combien le calcul différentiel est insuffisant pour déterminer A, B, C, etc.

M' étant autrefois beaucoup occupé de la fraction générale et de la fraction sommatoire réduite, je fûs conduit à des procédés combinatoires et à une notation abrégée pour eux. Mais ne connaissant pas alors les travaux de HINDENBURG, ²⁴⁾ je demeurai loin de l'ordre lucide nécessaire dans ces opérations compliquées, et après bien des efforts j'abandonnai une partie intéressante. Tant il est vrai qu'on peut être sur la voie et n'y pas avancer, faute d'une certaine forme, qui pour être naturelle, n'est pourtant jamais que le fruit de longues, et ajoutons, heureuses méditations. Assurement je ne suis pas le seul qui ait fait cette expérience,

LAGRANGE dont les ouvrages sont si riches en procédés combinatoires, observe quelque part qu'on ne parvient guère au simple qu'après avoir épuisé le composé. Cette remarque d'un géomètre dont on admire l'élégante simplicité, est parfaitement applicable à l'Analyse Combinatoire. Dans les mains de LEIBNITZ, de MOIVRE, de BOSCOWICH, etc. cette science décourageait le plus intrépide calculateur: réduite en système régulier par HINDENBURG, rien n'est plus facile aujourd'hui, et cette facilité de l'exécution est même telle qu'on pourrait être tenté de l'étendre à l'invention du système. Mais un mot suffit ici, il a échappé à l'universel et perspicace EULER. ²⁵⁾ En rendant cette justice au célèbre géomètre de Leipsic, j'ai en vue et les personnes qui n'estiment une découverte mathématique qu'après sa difficulté apparente et celles qui trouvent aisé tout ce qui a été fait par d'autres.

J'en ai assez dit pour faire sentir l'importance de l'Analyse Combinatoire. Que peut-on lui souhaiter encore? Une caractéristique commode qui la repande chez les géomètres de tous les pays, dont elle ne saurait manquer d'exciter l'émulation. Elle en est d'autant plus digne que ses usages sont innombrables, et qu'il n'est point de science, point d'Art, qui n'en puisse retirer de l'utilité. En Arithmétique (science toute combinatoire) elle enseigne la pratique la plus courte des grandes multiplications, divisions, éradications, compositions des périodes; elle facilite l'invention des facteurs, des nombres premiers et figurés comme on veut, et surtout leur détermination sûre et rapide par des machines, dont on n'a pas encore tiré tout le parti possible. LEIBNITZ, LAMBERT, HINDENBOURG, FELKEL, et d'autres, ²⁶⁾ en ont donné des preuves intéressantes qui doivent encourager. Quand on ne fait pas entrer les fraix en compte, il est plus que probable qu'on peut continuer indéfiniment le rapport 3,14159, et tout autre dont les élémens ne sont pas trop compliqués, sans autre peine que de tourner une manivelle. Ces recherches ne sont pas entièrement oiseuses. *Ludi in seria ducunt.* Le monde n'auroit pas la sublime Méchanique céleste, si LAPLACE eût dédaigné ces jeux du génie.

En Analyse déterminée l'Analyse Combinatoire préside aux développemens et renveloppemens des fonctions, à la vérification des termes généraux et sommatoires approchés, et elle seule peut réaliser les Eliminations étendues ²⁷⁾ purement curieuses en énoncés différentiels. En Analyse indéterminée la plupart des solutions sont de son ressort. ²⁸⁾ En Géométrie et Trigonometrie toute la partie formulaire et beaucoup de constructions, entr'autres la théorie des compartimens, dont on fait tant usage en Architecture. En Méchanique analytique, que LAGRANGE a le premier rédnit en corps de

doctrine, les équations générales des systèmes des corps et quantité d'autres parties appartiennent de droit à l'Analyse Combinatoire. Dans les Mathématiques appliquées elle peut servir l'Astronomie avec ses nombreuses auxiliaires et dépendances, mais surtout la science des probabilités, si utile en politique, en jurisprudence, en finance et négoce, dans les jeux et hasards de toute espèce ²⁹). En Chymie ³⁰) la théorie des fluides aéri-formes et la Crystallographie ouvrent encore un immense champ aux Combinaisons et peuvent par elles fournir de nouvelles lumières à la Médecine et aux arts d'utilité.

Il est des sciences et des arts à qui la Combinaison méthodique est si essentielle, que sans elle ils cessent d'être des arts et des sciences. Telles sont par exemple la Cryptographie ou l'art des chiffremens et déchiffremens ³¹) la Caractéristique ou science de la notation dont les idéographies ou langues universelles ne sont que des simples branches.

Les manufactures de luxe, condamnées à nuancer sans cesse le tableau mouvant des modes, retireront non seulement pour leurs machines, mais encore pour la variété et le choix de leurs productions, des secours importants de la science combinatoire. Il en est de même des beaux-arts où la nouveauté n'est pas moins de nécessité première, et où celle avouée par le bon goût est si extrêmement rare. Je conviens sans peine que l'invention devient de jour en jour plus difficile et que les premières places sont prises partout: si les artistes usaient cependant des ressources innombrables que leur offre la combinaison systématique, ils n'accuseraient jamais l'art d'une pauvreté qui n'est que dans eux et ils sacrifieraient moins souvent les formes régulières aux extravagantes, comme ont fait BORROMINI, BERNINI et tant de peintres. C'est principalement en Musique, l'art d'agrément le plus répandu, qu'on rencontre auprès d'une surcharge bizarre, cette stérilité que les nombreux

instrumens pallient envain aux oreilles non prévenues. Le vrai beau est toujours simple, et sans unité il ne saurait y avoir d'énergie, et, par conséquent, de grand effet.

Qui le croirait? La poesie, pour la distribution heureusement ménagée des pieds et strophes, des rimes et repos, enfin de toute son harmonie technique, s'enrichit en s'appliquant les combinaisons, ainsi que la Rhétorique qui est une moindre poesie et la Logique ou l'art de penser juste indispensable à toutes les sciences. On connaît en ce genre les essais précieux de LEIBNITZ, bien supérieurs à ceux de RAIMOND LULLY et du pere KIRCHER, qui prétendaient l'un dans son Grand-Art, l'autre dans sa Musurgie, mettre, par des classifications combinatoires un homme sans étude en état de raisonner sur chaque sujet comme un profond savant. On nuit aux sciences en leur attribuant trop: si chacune, et surtout celle d'inventer, est un résultat de combinaisons, il s'en faut bien que ce soient des combinaisons d'une pratique aussi facile et grossiere.

Usez, n'abusez point; voilà la loi suprême.

VOLT.

Mais ces parties appartiennent déjà à la Combinatoire métaphysique, et le géomètre les cède sans regret au philosophe.

B) PREMIÈRE PARTIE.

Section troisième.

Sur l'ALGÈBRE, écriture de l'Analyse mathématique.

F R A G M E N S.

„Inventée par des mathématiciens, l'Algèbre a une précision lumineuse, et une souplesse dont aucune autre notation ne peut se vanter: mais composé, comme toutes, successivement et sans égard à l'ensemble, elle est loin encore d'être au plus haut degré d'universalité et d'intelligence facile. L'imprimerie, à laquelle les sciences elles mêmes doivent leurs rapides progrès, a retardé ceux de leurs Caractéristiques en assujettissant les écrivains aux types existans. L'Analyse, faite pour le monde entier, n'en a pu sortir des langues européennes, et de toutes les classes de savans, celle des mathématiciens est la moins nombreuse.

„Trop souvent le bien est l'ennemi du mieux et le fond fait tort à la forme, tort qui réjaillit nécessairement sur lui. C'est la raison pourquoi aucune langue polie n'a une orthographe raisonnable et qu'on s'opposera toujours aux améliorations. Un reproche qu'on peut trop souvent faire à ces dernières, c'est d'être partielles et de retarder par là la réforme générale. Tel est, par exemple, le changement de *oi* en *ai* pour rendre les sons *è* et *ê*, telle la suppression de certaines lettres oiseuses et l'introduction d'accens plus pénibles à la plume. A moins de rebâir de fond en comble jamais on ne donnera à un vieux château gothique les belles proportions de l'Architecture grecque.

„Avec BEZOUT je nomme Algèbre l'écriture mathématique qui est à l'Analyse ce que les notes de la Musique sont à la composition, Au contraire de celle ci

L'Algèbre pêche par trop de liberté dans l'emploi des signes. S'il est commode pour l'auteur de créer son dictionnaire, il ne l'est pas au lecteur, surtout au commençant, de traduire sans cesse. L'esprit troublé par la versatilité des significations, perd son fil d'Ariadne : chargé de cent signes sans liaison systématique et fatigué d'explications continuelles, il ne peut s'élever sur l'aile de l'imagination pour découvrir au loin l'issue du labyrinthe. C'est là et dans l'incomplétion des proluxes livres élémentaires qu'il faut chercher, bien moins que dans la difficulté du sujet, pourquoi les chefs d'oeuvres d'Analyse sont plus admirés que lus. Il faut retenir une infinité de préliminaires plus ou moins in^{co}hérens, il faut se faire jour à travers une bibliothèque de mémoires académiques pour jouir des sublimes productions de nos grands maîtres. Peu de studieux en ont les moyens le tems et le courage.

„On peut m'objecter que pour obtenir le droit de remarquer les défauts de la science, j'aurais d'abord dû m'y distinguer par des ouvrages marquans. J'ai tort de ce côté, j'ai tort deux fois si mes réflexions ne sont pas justes. A ceux qui s'étonneront que les maîtres de l'art ne les aient pas faites, j'observerai qu'ils étaient peut-être trop occupés de l'art lui-même. LEIBNITZ a déjà averti qu'il n'y a guère que ceux qui apprennent sans maître qui découvrent certaines choses auxquelles les initiés ne pensent point, précisément parce qu'ils les connoissent trop.

„Je repète donc que l'écriture algébrique est imparfaite par sa versatilité et son manque de plan. Il lui faudrait, comme à la musique et aux autres écritures, des signes permanens. Mais tant qu'elle n'aura pas un bon système de notation, la liberté de varier doit être précieuse au mathématicien : tandis que le musicien est enchaîné à ses notes, lui ose dire avec Horace :

Pictoribus atque poëtis aequa potestas:

Hanc veniam damus, petimusque vicissim,

Et en conséquence je présente dans la seconde partie de cet Essai une notation systématique d'une exécution aisée à la plume, bien plus courte et plus distincte que celle en lettres alphabétiques, et significative au point de ne presque pas exiger d'avertissement pour qui la sait une fois. En embrassant l'Analyse entière et même ses besoins futurs elle n'a que peu de caractères méthodiquement combinés, et ce qui ne peut manquer de paraître singulier, avec des signes nouveaux elle ne contredit jamais l'usage vraiment général. La simplicité étant essentielle à une écriture de pratique je me suis borné à des lignes droites assemblées sous des angles moitié ou tiers de l'angle complet.

Ceux qui trouvent que j'attache trop d'importance à la structure des signes ne songent point qu'en mathématique, et même partout, la forme détermine en grande partie le fond. L'Analyse doit ses premiers progrès aux abréviations de discours comme on les trouve dans Diophante et dans les auteurs arabes: ses progrès suivans appartiennent aux chiffres algébriques, c'est à dire aux chiffres encadrés et aux lettres dont on se servit d'abord pour désigner des nombres connus, puis des nombres quelconques: son vol rapide est dû aux exposans et aux autres symboles fonctionnaires et combinatoires. Le calcul des différences de toute espèce qu'est-il sans notation convenable? rien que la méthode des limites infructueuse tant de siècles. J'ignore qui le premier a imaginé le signe-fonction ϕx ou Fx : mais bagatelle en apparence il a ouvert une source de découvertes, et sans lui LAGRANGE n'eut peut-être pas donné sa belle formule de reversion et ses autres théorèmes transcendans. On a disputé cent ans sur la nature du calcul différentiel: on se serait entendu sur le champ

si NEWTON et LEIBNITZ eussent écrit: $\frac{\dot{y}}{x}$ ou $\frac{dy}{dx}$ est

$$\frac{Fv - Fx}{v - x} \text{ pour le cas de } v \text{ changé en } x$$

après le dégagement du diviseur.

Mais l'effort d'imagination auquel oblige un changement imperceptible de x dans y , a multiplié (à l'aide des évanouissantes, des infiniment-petits, des riens absolus qui produisent une quantité, des limites qu'on ne peut jamais atteindre et qu'on atteint pourtant) les objections et les explications; et à force de commentaires on est parvenu à obscurcir la chose du monde la plus claire. On peut dire que le noeud gordien n'a été vraiment dénoué que dans ces derniers tems. Nous nous étonnons que des géomètres aient pu être divisés sur des principes simples; mais ce qui est évident aujourd'hui ne l'était point dans sa nouveauté, et la route une fois perdue, on ne la retrouve plus qu'avec des peines extrêmes. Tout est difficile quand on cherche, tout est facile quand on a trouvé. L'oeuf de Colomb peut s'appliquer aux inventions de tout genre, auxquelles on ne marche que les yeux bandés. A la vérité l'inventeur n'épuise jamais son invention: c'est une consolation pour la médiocrité laborieuse. Avidé de nouvelles découvertes le génie abandonne à la patience le soin de finir et la science y gagne doublement. Cet opusculé est le fruit de semblables considérations.

Je passe aux bases sur lesquelles il me semble qu'il faut asseoir une bonne notation analytique.

1. La plus grande intelligibilité est sans doute la première qualité, mais il faut ajouter, pour le commençant. Au géomètre fait la notation dont il a la routine, paraîtra toujours la meilleure. C'est pour cela (VOLTAIRE et d'autres l'ont déjà dit) que les reformes en sciences et ailleurs ne s'exécutent guère que

par les jeunes gens, quoique ce ne soient pas toujours eux qui les proposent. N'ayant que la peine d'apprendre, ils préfèrent naturellement la manière la plus simple : les vétérans devraient desapprendre pour apprendre, deux choses également ingrates pour qui est en possession d'enseigner.

2. Une autre qualité essentielle est la Précision, qu'il ne faut pas confondre avec la simple brièveté. Pour indiquer généralement une série, X est plus court que $_|\overline{V}$: mais cette dernière représentation, comme on le verra dans la seconde partie, est la miniature de la série même, et X n'est rien sans avertissement. On voudra bien faire cette remarque toutes les fois que nos symboles sont composés : ils s'interprètent alors eux-mêmes. La diffusion consiste en détails accumulés qui fatiguent le lecteur plus qu'ils ne l'éclairent : celui-ci n'a qu'une portion donnée d'attention dont on doit être économe pour qu'elle dure jusqu'à la fin.

3. Ce qui met le sceau aux conditions précédentes, c'est la construction méthodique des signes qui aide à les retenir, malgré leur nombre. Tout dépend ici d'un heureux choix d'éléments : est-il fait ? l'art combinatoire en tire à peu de frais une richesse supérieure à tous les besoins. Les éléments doivent être peu nombreux, et de bon goût.

S'il ne faut pas négliger la beauté des formes, elle doit cependant être subordonnée à la facilité de l'exécution. L'élégance de la simplicité est la seule qui convienne aux sciences, celle d'ornement est pour les arts. Sous ce point de vue le Σ qui a 6 traits est inférieur à $_|\overline{V}$ qui n'en a que trois que la plume trace d'un coup : mais c'est là le moindre avantage de notre signe sommatif.

On trouvera, j'espère, en général nos formes agréables et dociles. En sacrifiant quelques accessoires, il ne

faudrait même pas de nouveaux caractères d'impression : mais , comme sans eux la composition typographique se complique , la gravure sera préférable en attendant. Il serait même à souhaiter que tous les ouvrages de mathématiques , surtout élémentaires , se publiassent en planches , ne fût ce que parceque la figure pourrait toujours accompagner l'explication. La méthode des grands analystes modernes de compter les yeux pour rien en traitant la géométrie et la mécanique a ses inconveniens que ne compense pas le bon marché de l'ouvrage : Je donne dans la troisième partie de cet Essai une instruction complète et des procédés peu coûteux pour graver en peu de tems à l'eau forte et en étain. Si les géomètres s'y accoutumaient (il ne faut pour cela que de la volonté et deux ou trois mois d'exercice) leurs productions ne fourmilleraient plus de fautes qui dévoyent le lecteur , et que les longs errata redressent rarement toutes. Les doigts de l'auteur sont plus fidèles que ceux du compositeur typographique rarement mathématicien.

Afin de montrer la souplesse de ma notation combinatoire sous tous les rapports, je l'ai appliquée à un Microcosme de haute Analyse qui pourra au moins aider les futurs rédacteurs d'élémens, à propager le goût de la science qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain , abstraction faite de son utilité reconnue. Aux jeunes géomètres qui voudront m'étudier dans cette vue, je conseillerai de copier mot à mot , les 5 premières sections de la seconde partie, et celle de l'Analyse Combinatoire. Une seule transcription réfléchie instruira plus qu'une cent lectures. En s'identifiant ainsi avec l'auteur, on s'approprie ses idées et on surmonte le préjugé de l'habitude qui fait paraître les procédés qu'on sait, préférable aux dix fois plus faciles qu'il faut apprendre.

Les géomètres vétérans qui se résoudront à parcourir mon travail, en seront dédommages peut-être par

des théorèmes néufs ou démontrés d'une manière nouvelle et par le Polynome Combinatoire de HINDENBOURG. Je me reserve d'en parler plus amplement dans les sections suivantes.

Puisse mon essai d'une algèbre universelle être de quelque utilité pratique, ou engager au moins une main plus savante à produire un ensemble plus simple et plus parlant encore! Il est très possible et j'en donnerais une preuve dans cet ouvrage, si une notation analytique sans $+$ $-$ $.$ $:$ et leurs équivalens, sans lettres et sans chiffres, n'avait trop l'air d'un amusement mathématique. En attendant les géomètres prendront ce qu'ils voudront de mon système: il leur fournira au moins des ressources pour le cabinet.

Dans une entreprise aussi neuve, et tranchons le mot, aussi téméraire que celle d'une réforme algébrique, j'ai besoin de la plus grande indulgence: mais j'ai fait ce que j'ai pû pour m'en rendre digne. Vingt pages ont couté des années de travail. Des systèmes sans nombre ont précédé celui que je sou mets au jugement du public mathématicien, et s'il m'est permis de le dire, je ne suis arrivé au plus praticable qu'après avoir épuisé ceux qui ne l'étaient point.

II.

DEVELOPPEMENT GENERAL AUX FONCTIONS ARBITRAIRES.

PAR BURMANE.

Les méthodes vraiment générales tirent d'un petit nombre de principes simples une richesse inépuisable de conséquences utiles. C'est le propre du Calcul différentiel, de l'Analyse Combinatoire et des Dérivations du Professeur ARBOGAST. Une théorie qui participe de ces trois et que je nomme fonctionnaire m'occupe depuis plusieurs années: l'esquisse suivante mettra à portée de juger de sa facilité et de son étendue.

§. I. $f, F, \overset{1}{F}, \overset{2}{F}, \overset{3}{F}, \text{etc. } \overset{0}{F}, \overset{01}{F}, \overset{02}{F}, \text{etc.}$ seront des caractéristiques de fonctions indépendantes.

$f(fx)$ ou ffx s'abrégera f^2x et se prononcera fonction 2^{me} de x . On comprend f^3x, f^4x, f^5x etc. $f^n x$, la n^{me} fonction consecutive de x , est à peu près ce qu'ARBOGAST appelle la n^{me} Dérivée.

f^{-1} indiquera l'opération inverse de f ; de sorte que $f^{-1}fx = x$. Je donne à $f^{-1}x$ le nom systématique de fonction négative de x . Les formes $f^{-2}x, f^{-n}x$ s'expliquent par là. Si $fx = 0$, on a $x = f^{-1}0$, expression qui peut avoir plusieurs et même une infinité de valeurs.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f^m f^n x &= f^n f^m x = f^{m+n} x, & f^m f^{-n} x &= f^{-n} f^m x \\ & & &= f^{m-n} x, \\ f^1 x &= f x, & f^0 x &= f^{1-1} x = f f^{-1} x = x. \end{aligned}$$

Imitée de d^n et d^{-n} , la notation exposée est celle de tous les géomètres et n'a rien de mystérieux : la nouveauté qu'elle peut avoir est dans le fond et non dans la forme.

Ces principes fonctionnaires sont parfaitement généraux. J'ai fait cette remarque en les donnant dans un *Essai de Calcul fonctionnaire* présenté à l'Institut National de France en VI, mais trop imparfait alors pour pouvoir être imprimé. Mes idées s'étendirent depuis, et plus d'un an avant que l'excellent *Calcul des Dérivations* quittât la presse, j'avais déjà communiqué au Professeur HINDENBOURG et à d'autres amis littéraires la série aux fonctions consécutives,

$$F \propto A + Bf \propto + Cf^2 \propto + Df^3 \propto + \text{etc.}$$

En cherchant à me garantir du reproche futur de m'attribuer ce qui ne m'appartient pas, je suis très loin de vouloir atténuer le mérite du savant géomètre de Strasbourg, que personne n'admire plus que moi : nous n'avons pas communiqué ensemble. ARBOGAST a au moins la simultanéité d'invention, et dans ce qu'il a publié le premier je lui cède avec plaisir la reconnaissance publique. Occupés du même objet nous avons dû nous rencontrer quelques fois ; mais nos points de départ et notre marche différant entièrement, il me reste assez des choses propres.

§. 2. Si nous comprenons par SUITE une succession de termes soumis à une même loi, et pour leur structure et pour leur liaison analytique, la théorie des développemens est à peine entamée. J'abandonne cette généralité à de plus habiles et me borne aujourd'hui aux Séries et aux Fractions continues des fonctions si indépendantes entr'elles que le calculateur les choisit à volonté. Ceci distingue mes développemens de ceux d'ARBOGAST dont les termes, dérivés chacun du précédent, dépendent nécessairement les uns des autres.

Voici d'abord mes normes générales :

S E' R I E

$$F x - F a = A \overset{1}{F} x + B \overset{2}{F} x + C \overset{3}{F} x + \dots + N \overset{n}{F} x + \text{etc.}$$

FRACTION CONTINUË

$$F x - F a = \frac{\overset{1}{F} x}{A +} \frac{\overset{2}{F} x}{B +} \frac{\overset{3}{F} x}{C +} \dots \frac{\overset{n}{F} x}{N} + \text{etc.}$$

J'écris les fractions successives en ligne horizontale :
le + après A, B, C, etc. empêchent de s'y tromper.

§. 3. Commençons par

$F x - F a = A \overset{1}{F} x + B \overset{2}{F} x + C \overset{3}{F} x + \dots + M \overset{n-1}{F} x + N \overset{n}{F} x +$
etc. et supposons $\overset{1}{F} x$ nulle par $x = a$, $\overset{2}{F} x$ nulle par
 $x = a$ et $x = b$, $\overset{3}{F} x$ nulle par $x = a$, $x = b$ et $x = c$;
enfin $\overset{n}{F} x$ nulle par $x = a, b, c, d$, jusques n , lettre
 n^{me} . Ces valeurs de x successivement employées dans
la série normale, produisent les équations suivantes pour
déterminer A, B, C, etc.

$$F b - F a = A \overset{1}{F} b$$

$$F c - F a = A \overset{1}{F} c + B \overset{2}{F} c$$

$$F d - F a = A \overset{1}{F} d + B \overset{2}{F} d + C \overset{3}{F} d$$

et en général

$$F n - F a = A \overset{1}{F} n + B \overset{2}{F} n + \dots + M \overset{n-1}{F} n.$$

$$\text{d'où } A = \frac{F b - F a}{\overset{1}{F} b}$$

$$B = \frac{F c - F a}{\overset{2}{F} c} - A \frac{\overset{1}{F} c}{\overset{2}{F} c}$$

$$\text{d'où } C = \frac{F_d - F_a}{F_d^3} - A \frac{F_d^1}{F_d^3} - B \frac{F_d^2}{F_d^3}$$

et en général

$$M = \frac{F_n - F_a}{F_n^{n-1}} - A \frac{F_n^1}{F_n^{n-1}} - B \frac{F_n^2}{F_n^{n-1}} - \dots - L \frac{F_n^{n-2}}{F_n^{n-1}}.$$

§. 4. Voilà le terme général en série récurrente. Pour obtenir son expression immédiate mettons la seconde suite d'équations sous une forme combinatoire facile à écrire et à retenir.

$$A = 01$$

$$B = 02 - A. 12$$

$$C = 03 - A. 13 - B. 23$$

$$D = 04 - A. 14 - B. 24 - C. 34$$

$$E = 05 - A. 15 - B. 25 - C. 35 - D. 45$$

etc.

etc.

LEIBNITZ est l'inventeur de ces coefficients parlans si commodes pour découvrir les loix compliquées. Chez nous le premier chiffre est l'indice de la fonction numérateur du vrai coefficient, et le second chiffre est l'indice de la fonction dénominateur. Augmenté d'une unité ce dernier apprend encore la quantième lettre remplace x dans les deux fonctions. Ainsi

$$24 = \frac{F_e^2}{F_e^4}, \quad 59 = \frac{F_k^5}{F_k^9}, \quad \text{etc.}$$

Par la substitution continuelle des valeurs connues, on obtient en ordonnant selon 01, 02, 03, etc, et rangeant par ordre ascendant de droite à gauche et de haut en bas

$$A = 01$$

$$B = 02 - 12. 01$$

$$C = 03 - 23. 02 + 23. 12 \Big) 01$$

$$D = 04 - 34. 03 + 34. 23 \Big) 02 - 34. 23. 12 \Big) 01$$

$$E = 05 - 45. 04 + 45. 34 \Big) 03 - 45. 34. 23 \Big) 02 + 45. 34. 23. 12 \Big) 01$$

$$F = 06 - 56. 05 + 56. 45 \Big) 04 - 56. 45. 34 \Big) 03$$

$$+ 56. 45. 34. 23 \Big) 02 - 56. 45. 34. 23. 12 \Big) 01$$

et ainsi de suite

La seule disposition des termes partiels decouvre déjà leur loi, qui est telle pour le n^{ieme} coefficient:

C

$$N = 0n + a.0(n-1) + b.0(n-2) + c.0(n-3) + \text{etc.},$$

$$a = -(n-1)n$$

$$b = -a.(n-2)(n-1) - (n-2)n$$

$$c = -b.(n-3)(n-2) - a.(n-3)(n-1) - (n-3)n$$

$$d = -c.(n-4)(n-3) - b.(n-4)(n-2) - a.(n-4)(n-1) - (n-4)n$$

$$e = -d.(n-5)(n-4) - c.(n-5)(n-3) - b.(n-5)(n-2) - a.(n-5)(n-1) - (n-5)n$$

etc.

etc.

etc.

Les novices en Analyse Combinatoire voudront bien ne pas confondre avec les recurrences ordinaires cette construction d'un terme au moyen de ses parties intégrantes; elle donne sur le champ tel coefficient qu'on veut.
P. E.

le 9^{ième} coefficient

$$= 09 - 89.08 + 89.78.07 - 89.78.67.06 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{r} - 79 \quad + 79.67 \\ + 89.68 \\ - 69 \end{array}$$

Un peu d'attention découvre d'autres loix; mais la présente ne laisse rien à désirer: elle n'exige que le tems nécessaire pour écrire le developpement.

Cette méthode simple de trouver le terme général d'une série si étendue prouve la supériorité de l'Analyse Combinatoire sur la différentielle dans cette partie.

§. 5. Passons à un autre point de vue, en supposant $Fx = f^n x$, quantité nulle par $x = a$. Il en résulte $Fx - Fa = Af x + Bf^2 x + Cf^3 x + \dots + Nf^n x + \text{etc.}$

Si f^{-1} est de nature à se prendre terme pour terme et à ne pas altérer les facteurs sans x ,

$f^{-n} (Fx - Fa) = f^{-n} (Af x + Bf^2 x + Cf^3 x + \text{etc.})$
se réduira à $f^{-n} Fx = N + Of x + Pf^2 x + \text{etc.}$

Par $x = a$ nous obtenons ici $N = f^{-n} Fa$, et par là

$$F_x - F_a = f^{-1} F_a. f x + f^{-2} F_a. f^2 x + f^{-3} F_a. f^3 x + \text{etc}$$

Le théorème de TAYLOR $F_x - F_a = \frac{dF_a}{da} \cdot \int dx + \frac{d^2 F_a}{da^2} \cdot \int^2 dx^2 + \frac{d^3 F_a}{da^3} \cdot \int^3 dx^3 + \text{etc.}$ est le cas le plus particulier de la série aux fonctions consécutives.

Une infinité d'autres opérations que celles indiquées par d et Δ , $\int$ et Σ satisfait à $F_x - F_a = f^{-1} F_a. f x + \text{etc.}$ J'observe ici qu'en fonctions consécutives il y a une différence essentielle entre $f F z$ simple combinaison de $F z$ avec des constantes, et $f F z$, combinaison des variations de $F z$ avec des variations de z . Dans ce paragraphe f embrasse les deux cas, en les soumettant à la limitation stipulée.

§. 6. Soit F_x de la forme $\overset{1}{F}x. \overset{2}{F}x. \overset{3}{F}x \dots \overset{n}{F}x$. Donc $F_x - F_a = A \overset{1}{F}x + B \overset{1}{F}x. \overset{2}{F}x + C \overset{1}{F}x. \overset{2}{F}x. \overset{3}{F}x + \text{etc.}$

Comme $\overset{1}{F}x = 0$, $\overset{2}{F}x = 0$, $\overset{3}{F}x = 0$, etc. produisent respectivement $x = \overset{1}{F}^{-1} 0 = a$, $x = \overset{2}{F}^{-1} 0 = b$, $x = \overset{3}{F}^{-1} 0 = c$, etc. la formule du §. 4. construit sur le champ A, B, C , etc.

Quand l'évaluation de $F f^{-1} 0$ n'est pas immédiatement possible, je l'écris $F f^{-1} (fs - fs)$, et le théorème taylorien donne par $F f^{-1} fs = Fs$,

$$F f^{-1} 0 = Fs - \frac{dFs}{dfs} \cdot \frac{fs}{1} + \frac{d^2 Fs}{dfs^2} \cdot \frac{fs^2}{1.2} - \frac{d^3 Fs}{dfs^3} \cdot \frac{fs^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \text{ } s \text{ étant arbitraire.}$$

Cette solution simple se trouve dans l'Essai de Calc. fonct. section 4). A chaque différentiation on divise par dfs et réduit, moyennant quoi on ne parvient pas à de secondes différences de s . Lorsque ce

procédé compliqué on y remédie souvent par

$$\frac{d^n F s}{d f s^n} = \frac{d^{n-1} \left[\frac{d F s}{d s} \cdot \left(\frac{s - s}{f s - f s} \right)^n \right]}{d s^{n-1}},$$

la constante s se changeant en s après les différentiations.

J'ai présentée cette formule conversionnelle un peu plus généralement dans un mémoire que l'Institut National a jugé digne d'être imprimé dans ses recueils de l'an VII, en m'observant qu'elle peut se déduire des théorèmes réversionnels de LAGRANGE et de LAPLACE.

Afin d'épargner à d'autres des recherches inutiles et peut-être des paralogismes, j'avertis qu'il n'est permis ni de prendre n négatif, ni de changer sous le signe d^{n-1} , la fraction indéterminée $\frac{s - s}{f s - f s}$ en sa valeur finale $\frac{d s}{d f s}$.

§. 7. Autre cas particulier du § 3.

$$F x \text{ étant } F x \left[F x - F a \right] \left[F x - F (a + k) \right] \left[F x - F (a + 2k) \right] \dots \left[F x - F (a + (n-1)k) \right],$$

$$\text{on a } F x - F a = A F x \left[F x - F a \right] + B F x \left[F x - F a \right] \left[F x - F (a + k) \right] + \text{etc.}$$

Outre la solution du § 3. qui donne $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, etc. nous avons encore la suivante,

$F x$ variée n fois selon $\Delta x = k$ constante, aura un facteur $F(x + nk) - F(a + nk)$, que $x = a$ annullera.

Il s'ensuit que $\frac{\Delta^n F x}{k^n}$ développé disparaîtra alors,

et qu'en différentiant n fois l'équation proposée, on

obtiendra

$$\frac{\Delta^n Fx}{k^n} = A \frac{\Delta^n (F_x^{01} [F_x^{11} - F_a^{11}])}{k^n} \\ + B \frac{\Delta^n (F_x^{02} [F_x^{12} - F_a^{12}] F_x^{22} - F(a+k)^{22})}{k^n} + \\ \dots + N \frac{\Delta^n (F_x^{0n} [F_x^{1n} - F_a^{1n}] \dots [F_x^{nn} - F(a+(n-1)k)^{nn}])}{k^n}$$

à la condition de changer x en a après les différentiations,

Application. $\Sigma Fx. \Delta x$ nulle par $x=a$ devient ainsi

$$\Sigma Fx. \Delta x = A F_x^{01} [F_x^{11} - F_a^{11}] + B F_x^{02} [F_x^{12} - F_a^{12}] \\ [F_x^{22} - F(a+\Delta x)^{22}] + \text{etc.} \text{ série convergente à volonté,} \\ \text{puisque chaque fonction y est arbitraire. La relation} \\ \text{de coefficients est la même qu'en haut.}$$

Par k nulle, on a $\int Fx dx = A F_x^{01} (F_x^{11} - F_a^{11}) \\ + B F_x^{02} (F_x^{12} - F_a^{12}) (F_x^{22} - F_a^{22}) + C F_x^{03} (F_x^{13} - F_a^{13}) (F_x^{23} - F_a^{23}) \\ (F_x^{33} - F_a^{33}) + \text{etc.} \text{ et la relation}$

$$\frac{d^n Fx}{dx^n} = A \frac{d^n (F_x^{01} [F_x^{11} - F_a^{11}])}{dx^n} + \dots$$

$$\dots + N \frac{d^n (F_x^{0n} [F_x^{1n} - F_a^{1n}] \dots [F_x^{nn} - F_a^{nn}])}{dx^n},$$

toujours pour x finalement $\pm a$.

$\Sigma^m Fx. \Delta x^m$ et $\int^m Fx. dx^m$ s'obtiennent d'une manière semblable: mais je ne puis m'étendre là-dessus.

§. 8. *Cas plus particulier.* D'après les principes différentiels de l'Essai de Calcul fonctionnaire, section 1 et 2, on a pour Δx constante,

$$\Sigma^m \Delta(x-a)^m = \frac{x-a}{1} \cdot \frac{x-a-\Delta x}{2} \cdot \frac{x-a-2\Delta x}{3} \dots \frac{x-a-(n-1)\Delta x}{n}$$

sans arbitraires ajoutées.

Ceci posé, $Fx - Fa = A F^1 x. \Sigma \Delta(x-a) + B F^2 x. \Sigma^2 \Delta(x-a)^2 + C F^3 x. \Sigma^3 \Delta(x-a)^3 + \text{etc.}$ prendra la forme suivante par le procédé du §. 3. en changeant x en $a + n\Delta x$ et effaçant ce qui se détruit dans chaque facteur,

$$F(a + n\Delta x) - Fa = \frac{n\Delta x}{1} A F^1(a + n\Delta x) + \frac{n(n-1)\Delta x^2}{1 \cdot 2} B F^2(a + n\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} C F^3(a + n\Delta x) + \dots + \Delta x^n \cdot N F^n(a + n\Delta x)$$

Mais on a aussi par le paragraphe précédent, en exécutant les développemens différentiels et supprimant ce que $x = a$ détruit,

$$\frac{\Delta^n F a}{\Delta a^n} = \frac{n}{1} A \frac{\Delta^{n-1} F^1 a}{\Delta a^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} B \frac{\Delta^{n-2} F^2 a}{\Delta a^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} C \frac{\Delta^{n-3} F^3 a}{\Delta a^{n-3}} + \dots + N F^n a,$$

Δa étant ici la même constante que Δx . Cette relation des coefficients est la meilleure pour les différences nulles et la première pour les différences finies.

Changeons Δ et Σ en d et $\int$, il vient par

$$\int^n d(x-a)^n = \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

$$F x - F a = A \overset{1}{F} x. \frac{x-a}{1} + B \overset{2}{F} x. \frac{(x-a)^2}{1.2} \\ + C \overset{3}{F} x. \frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^n F a}{d a^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1} \overset{1}{F} a}{d a^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} B \frac{d^{n-2} \overset{2}{F} a}{d a^{n-2}} \\ + \dots + N \overset{n}{F} a$$

§. 9. *Extension du cas précédent.* La série plus générale

$$F x - F a = A \overset{1}{F} x. \frac{f x - f a}{1} + B \overset{2}{F} x. \frac{(f x - f a)^2}{1.2} \\ + C \overset{3}{F} x. \frac{(f x - f a)^3}{1.2.3} + \text{etc.} \quad \text{a pour relation}$$

des coefficients.

$$\frac{d^n F a}{d f a^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1} \overset{1}{F} a}{d f a^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} B \frac{d^{n-2} \overset{2}{F} a}{d f a^{n-2}} \\ + \dots + N \overset{n}{F} a \quad \text{où l'on emploiera s'il en est}$$

besoin la formule conversionnelle §. 6.

Application I. $\int F x. dx = A \overset{1}{F} x. \frac{f x - f a}{1} + B \overset{2}{F} x. \frac{(f x - f a)^2}{1.2} + \text{etc.}$, intégrale nulle par $x=a$
a donc cette relation pour déterminer A, B, C, etc.

$$\frac{d^n (\int F a. d a)}{d f a^n} \text{ ou } \frac{d^{n-1} \left(\frac{F a. d a}{d f a} \right)}{d f a^{n-1}} =$$

$$\frac{n}{1} A \frac{d^{n-1} \overset{1}{F} a}{d f a^{n-1}} + \dots + N \overset{n}{F} a, \text{ ou par la for-}$$

mule conversionnelle $\frac{d^{n-1} \left[F a. \left(\frac{a-a}{f a - f a} \right)^n \right]}{d a^{n-1}}$

$$= \frac{n}{1} A \frac{d^{n-2} \left[\frac{d \overset{1}{F} a}{d a} \cdot \left(\frac{a-a}{f a - f a} \right)^{n-1} \right]}{d a^{n-2}} + \dots + N \overset{n}{F} a$$

a constante devenant finalement a . $\int^n Fx. dx^m$ ayant, comme il est toujours possible à l'aide des constantes ajoutées, un facteur x^m , n'exige de plus qu'un développement plus ou moins grand du membre gauche de la relation.

Ces séries intégrales où chaque terme est à l'arbitre du calculateur, sont bien supérieures à celles de BERNOULLI qui divergent trop souvent.

Application II. $Fx - Fa = A \overset{1}{F} fx. \frac{fx - fa}{1} + B \overset{2}{F} fx. \frac{(fx - fa)^2}{1.2} + C \overset{3}{F} fx. \frac{(fx - fa)^3}{1.2.3} +$
etc. a pour relation des coefficients

$$\frac{d^n Fa}{d fa^n} \text{ ou } \frac{d^{n-1} \left[\frac{dFa}{da} \cdot \left(\frac{a - a}{fa - fa} \right)^n \right]}{da^{n-1}} =$$

$$\frac{n}{1} A \frac{d^{n-1} \overset{1}{F} fa}{d fa^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} B \frac{d^{n-2} \overset{2}{F} fa}{d fa^{n-2}} + \dots$$

$$+ N \overset{n}{F} a \quad \text{Le membre droit n'a pas besoin de conversion différentielle, } fa \text{ y étant la variable commune.}$$

Soit $fx = 0$ une équation donnée, vulgaire ou transcendante, on a en même tems

$$Fx = Fa - A \overset{1}{F} 0. \frac{fa}{1} + B \overset{2}{F} 0. \frac{fa^2}{1.2} - C \overset{3}{F} 0. \frac{fa^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Voilà donc une conversion fonctionnaire plus étendue que celles données jusqu'aujourd'hui, puisque non seulement a , mais encore la structure de $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$, etc. y sont arbitraires. C'est le Retour des suites de LAGRANGE généralisé par les fonctions indépendantes, sous une forme pratique commode.

Exemple. De $fx - \int X dx = 0$ conclure immédiatement Fx . En prenant pour a la valeur de x qui annule l'intégrale: on a pour Fx la série ci-dessus, et

pour relation récurrente des coefficients,

$$\frac{d^n F x}{d(fx - \int X dx)^n} = \frac{n}{1} \Delta \frac{d^{n-1} F (fx - \int X dx)}{d(fx - \int X dx)^{n-1}}$$

+ ... + N F f x, x s'y changeant en a après les différentiations. Cette condition dégage la relation de tout signe $\int$. Je ne sache pas qu'on ait encore étendu les Retours de suite aux équations différentielles.

Le terme général $N F f x, [F f x - F f a] [F f x - F f a] \dots [F f x - F f a]$ donne un Retour beaucoup plus étendu dont les §. 3 et 7. nous assurent également la loi des coefficients.

§. 10. Soient pour simplifier $F x - F a = (X)$,
 $F x, [F x - F a] [F x - F(a+k)] \dots [F x - F(a+(n-1)k)] = (\bar{X})$;

soient X et $\bar{X}$ ces mêmes quantités en y changeant x en a après les différentiations éventuelles: nous aurons par

la remarque du §. 7, la $n^{\text{ième}}$ variée de $\bar{X}$ nulle. Il en résulte, qu'en différentiant n fois selon $\Delta x = k$ l'équation

$(X) = A(\bar{X}) + B(\bar{X}) + C(\bar{X}) + \text{etc.}$, et divisant toujours par la différence qu'affecte le premier coefficient, il disparaîtra chaque fois un de ceux-ci et x = a procurera successivement

$$A = \frac{\Delta X}{\Delta \bar{X}}, \quad B = \frac{\Delta(\Delta X : \Delta \bar{X})}{\Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})}$$

$$C = \frac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}$$

$$D = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}\right)}{\Delta\left(\frac{\Delta[\Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X}) : \Delta(\Delta \bar{X} : \Delta \bar{X})]}\right)}$$

Or le §. 7. nous enseigne le développement de N en fonction commune et différentielle: nous savons donc exécuter la $n^{\text{ième}}$ de ces différentiations hétérogènes, sans autre peine que d'écrire le résultat.

§. II. *Interpolation de, etc.*, $f^{-2}x$, $f^{-1}x$, x , fx , f^2x , f^3x , etc. C'est l'évaluation de $f^{\frac{n}{2}}x$, pour n fractionnaire. Communément n ne passe pas $\frac{1}{2}$.

En prenant pour a , b , c , etc. des nombres de la suite etc. -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , etc. la série normale est en même tems une formule d'interpolation. Voici de plus la méthode que j'ai donnée dans l'Essai de Calcul fonctionnaire et qui est au moins singulière.

Soit $f^n x - x = A \frac{n}{1} + B \frac{n^2}{1.2} + C \frac{n^3}{1.2.3} + \text{etc.}$, on aura $A = \frac{df^n x}{dn}$ pour n nulle après la différentiation, ce que nous représenterons par $\frac{df^0 x}{d0}$. Mais comment différentier un pur indice?

La transformation $\frac{df^0 x}{d0} = fx - x - \frac{1}{2}(f^2 x - 2fx + x) + \frac{1}{3}(f^3 x - 3f^2 x + 3fx - x) - \text{etc.}$ ne converge presque jamais: ordonnées en fonctions ascendantes, elle donne un résultat en apparence absurde: elle suppose d'ailleurs que fx , $f^2 x$, $f^3 x$, etc. soient possibles; ce qui n'a souvent pas lieu en interpolation. P. E. dans $L^{\frac{1}{2}} 1$ ou $L^2 1 = LL 1 = L0 = -\infty$. Cherchons à tourner ces obstacles. $\frac{df^n x}{dn} = \frac{f^{n+dn} x - f^n x}{dn} = \frac{f^n f^{dn} x - f^n x}{dn}$ par §. I. Comme A , B , C , etc. ne contiennent pas n on a $f^{dn} x = x + A \frac{dn}{1} + B \frac{dn^2}{1.2} + \text{etc.}$ et $f^n f^{dn} x = f^n(x + A \frac{dn}{1} + \text{etc.}) = f^n x + \frac{f^n x}{dx} \cdot \frac{dn}{1} + \text{etc.}$

$A \, d n + (\text{etc.}) \, d n^2$ par la formule de TAYLOR. Substitution faite de cette valeur, il vient en arrangeant

$$\frac{d f^n x}{d n} = A \frac{d f^n x}{d x}, \text{ théorème remarquable, qu'on}$$

peut énoncer ainsi: $\frac{d F^{m+n} x}{d n} = \frac{d F^m x}{d F^m} \cdot \frac{d F^{m+n} x}{d x},$

Soumettons y le développement de $f^n x$, et l'identité de $A + B \frac{n}{1} + C \frac{n^2}{1.2} + D \frac{n^3}{1.2.3} + \text{etc.}$

$$= A + A \frac{d A}{d x} \cdot \frac{n}{1} + A \frac{d B}{d x} \cdot \frac{n^2}{1.2} + \text{etc. nous pro-}$$

curera $B = A \frac{d A}{d x}, \quad C = A \frac{d B}{d x} = A \frac{d(A \, d A)}{d x^2},$

$$D = A \frac{d C}{d x} = A \frac{d(A \, d(A \, d A))}{d x^3} + \text{etc., et par}$$

conséquent $f^n x - x = A \frac{n}{1} + A \frac{d A}{d x} \cdot \frac{n^2}{1.2} + \frac{A \, d(A \, d A)}{d x^2} \cdot \frac{n^3}{1.2.3} + \frac{A \, d(A \, d(A \, d A))}{d x^3} \cdot \frac{n^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$ Jusques ici l'Essai de Calcul fonctionnaire à la fin de la 4^{me} Section.

Pour déterminer A je remarque que cette équation a lieu pour chaque valeur de n : donc en prenant $n = 1$ on trouve en divisant

$$A = \frac{f x - x}{1 + \frac{d A}{2 \, d x} + \frac{d A \, (d A)}{2.3 \, d x^2} + \frac{d(A \, d(A \, d A))}{2.3.4 \, d x^3} + \text{etc.}}$$

La substitution continuelle de la valeur en partie connue de A donnera une espèce de fraction continue d'un calcul très rebelle.

Autrement. Désignons A par $F x$ pour avoir

$$f^n x = x + F x \cdot \frac{n}{1} + \text{etc. Nous aurons aussi}$$

$$f^n f x = f x + F f x \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.} \quad \text{et}$$

$$f f^n x = f \left(x + F x \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.} \right) = f x + \frac{d f x}{d x} F x \cdot \frac{n}{1}$$

+ etc. par le théorème taylorien. Donc puisque $f^n f x = f f^n x$ par §. 1., l'identité de leurs développemens fournit, en arrangeant,

$$\frac{F f x}{F x} = \frac{d f x}{d x} \quad \text{équation où il faut déterminer}$$

$F x = A$. Sa résolution générale dépend des différences fonctionnaires, et si on la veut praticable, elle passe encore les forces de chaque analyse. Dans les cas particuliers il y a des ressources sans nombre, et les fractions continues sont une des plus sûres.

§ 12. Nous avons été obligé d'astreindre le $F x$ de la série normale à des conditions de nullité: nous pourons les éviter dans la fraction continue normale,

$$F x - F a = \frac{\frac{1}{F} x}{A +} \frac{\frac{2}{F} x}{B +} \frac{\frac{3}{F} x}{C +} \text{etc.} \quad \text{Mais avant tout, établissons quelques préliminaires.}$$

§. 12. *Théorème.* $1' \ 2' \ 3' \ 4' \ \text{etc.} \quad 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ \text{etc.}$ équivalant à des lettres quelconques,

$$\begin{aligned} \text{Si } 0, &= - \frac{1'}{1, +} \frac{2'}{2, +} \frac{3'}{3, +} \dots \frac{n-1'}{n-1, +} \frac{n'}{n,}, \\ \text{ona} \quad n, &= - \frac{n'}{n-1, +} \frac{n-1'}{n-2, +} \frac{n-2'}{n-3, +} \dots \\ &\dots \frac{3'}{2, +} \frac{2'}{1, +} \frac{1'}{0,} \end{aligned}$$

$n-1'$ est ici le $(n-1)$ ième numérateur et $n-1$, le $(n-1)$ ième dénominateur: ainsi des autres.

Démonstration. Multiplions l'équation

$$0, = - \frac{1'}{1, +} \frac{2'}{2, +} \dots \frac{n'}{n,} \quad \text{par le dénominateur du}$$

membre droit, $1, + \frac{2'}{2, + \dots n,} \frac{n'}{n,}$, et divisons-la par le membre gauche 0, il vient

$$1, + \frac{2'}{2, + \dots \frac{3'}{3, + \dots \frac{n'}{n,}}} = -\frac{1'}{0,}, \text{ et en transposant}$$

$$1, + \frac{1'}{0,} = -\frac{2'}{2, + \dots \frac{3'}{3, + \dots \frac{n'}{n,}}}.$$

Multiplions encore ici par le dénominateur du membre droit et divisons par le membre gauche, nous aurons

$$2, + \frac{3'}{3, + \dots \frac{n'}{n,}} = -\frac{2'}{1, + \dots \frac{1'}{0,}}, \text{ et par la transposition:}$$

$$2, + \frac{2'}{1, + \dots \frac{1'}{0,}} = -\frac{3'}{3, + \dots \frac{4'}{4, + \dots \frac{n'}{n,}}}.$$

La répétition du procédé procure

$$3, + \frac{3'}{2, + \dots \frac{2'}{1, + \dots \frac{1'}{0,}}} = -\frac{4'}{4, + \dots \frac{n'}{n,}}; \text{ puis}$$

$$4, + \frac{4'}{3, + \dots \frac{1'}{0,}} = -\frac{5'}{5, + \dots \frac{n'}{n,}}$$

Comme la marche est uniforme, on obtient finalement

$$n, + \frac{n'}{n-1, + \dots \frac{n-1'}{n-2, + \dots \frac{1'}{0,}}} = 0, \text{ et}$$

$$n, = -\frac{n'}{n-1, + \dots \frac{n-1'}{n-2, + \dots \frac{1'}{0,}}}$$

§ 13. *Problème.* Sommer

$$\frac{n'}{n-1, + \dots \frac{n-1'}{n-2, + \dots \frac{n-2'}{n-3, + \dots \frac{2'}{1, + \dots \frac{1'}{0,}}}}$$

En commençant la sommation de bas en haut on obtient successivement,

Dénominateurs			0, 1'	Numérateurs		
			1'	0, 2'		
210, + 2, 1'			10, 3'	+ 31'		
			0, 2'			
3210, + 32, 1' + 31'			210, 4'	+ 24, 1'		
			30, 2'			
			10, 3'	04, 2'		
43210, + 432, 1' + 4, 31'			3210, 5'	+ 32, 51' + 531'		
			430, 2'	2, 41'		
			410, 3'	0, 42'		
			210, 4'	30, 52'		
				10, 53'		
543210,	+ 5432, 1' + 54, 31' + 531'			+ 432, 61' + 4, 631'		
	5430, 2'	52, 41'		430, 62'	2, 641'	
	5410, 3'	50, 42'		410, 63'	0, 642'	
	5210, 4'	32, 51'		210, 64'		
	3210, 5'	30, 52'				
			10, 53'			
6543210,	+ 65432, 1' + 654, 31' + 6, 531'			+ 5432, 71' + 54, 731' + 7531'		
	65430, 2'	652, 41'	4, 631'	5430, 72'	52, 741'	
	65410, 3'	650, 42'	2, 641'	5410, 73'	50, 742'	
	65210, 4'	632, 51'	0, 642'	5210, 74'	32, 751'	
	63210, 5'	630, 52'		3210, 75'	30, 752'	
	43210, 6'	610, 53'			10, 753'	
		432, 61'				
		430, 62'				
		410, 63'				
		210, 64'				

Et ainsi de suite. Pour simplifier je n'ai employé les traits distinctifs de numérateur et dénominateur qu'au dernier chiffre de chaque produit. Ces fractions sommées sont les valeurs respectives de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. De leur construction on conclut

$$n = \frac{\left[\begin{array}{l} n-2 \cdot n-3 \dots 0, n' + \frac{n-2 \cdot n-3 \dots 2}{n \cdot n-2'} \\ + \frac{n-2 \cdot n-3 \dots 4}{n \cdot n-2 \cdot n-4'} \\ + \frac{n-2 \cdot n-3 \dots 6}{n \cdot n-2 \cdot n-4 \cdot n-6'} + \text{etc.} \end{array} \right]}{n}$$

$$\left[\begin{array}{l} n-1 \cdot n-2 \dots 0, + \frac{n-1 \cdot n-2 \dots 2}{n-1'} \\ + \frac{n-1 \cdot n-2 \dots 4}{n-1 \cdot n-3'} \\ + \frac{n-1 \cdot n-2 \dots 6}{n-1 \cdot n-3 \cdot n-5'} + \text{etc.} \end{array} \right]$$

Les colonnes de doubles produits sont représentées ici par le premier produit des dénominateurs, et le dernier produit des numérateurs. On trouvera les produits, sousentendus au moyen des règles suivantes où les mots et chiffres supérieurs sont pour les numérateurs et les inférieurs pour les dénominateurs.

- 1°. Diminuez dans le produit exprimé le chiffre de la droite de $\frac{1}{2}$ jusqu'à ce que vous parveniez à $\frac{1}{0}$.
- 2°. Diminuez le second chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite un chiffre moindre de $\frac{2}{1}$.
- 3°. Repetez ici la règle 1^{re}, puis la 2^{me} et continuez jusqu'à exhaustion.
- 4°. Diminuez le troisième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite deux chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$. Sur ces deux chiffres exécutez les règles 1^e, 2^e, 3^e.
- 5°. Diminuez le quatrième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite trois chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$, sur lesquels, vous exécuterez les règles précédentes.
- 6°. Continuez de la sorte et mettez les produits obtenus l'un ^{sur} l'autre. Joignez la colonne des dénominateurs à celle des numérateurs, et la colonne totale sera construite.

Un coup d'oeil attentif et surtout quelques transcriptions enseigneront mieux le procédé que ces règles longues à énoncer et difficiles à retenir. Jamais l'analyse différentielle ne découvrirait cette loi que HINDENBOURG et BURCKHARDT ont trouvée un peu différemment.

§. 14. *Problème.* Déterminer le $n^{\text{ième}}$ dénominateur N de la fraction continue des fonctions indépendantes.

$$F x - F a = \frac{\frac{1}{F} x}{A +} \frac{\frac{2}{F} x}{B +} \frac{\frac{3}{F} x}{C +} \dots \frac{\frac{n-1}{F} x}{M +} \frac{\frac{n}{F} x}{N +} \frac{\frac{n+1}{F} x}{O +} \text{etc.}$$

Soit $\frac{n+1}{F} x = 0$, on a $x = F^{-1} 0$, valeur censée connue. $\frac{\frac{n+1}{F} x}{O +} \text{etc.}$ s'évanouissant par cette supposition,

$$F a - F x = - \frac{\frac{1}{F} x}{A +} \frac{\frac{2}{F} x}{B +} \dots \frac{\frac{n}{F} x}{N} \text{ devient par §. 12.}$$

$$N = - \frac{\frac{n}{F} x}{M +} \frac{\frac{n-1}{F} x}{L +} \frac{\frac{n-2}{F} x}{K +} \dots \frac{\frac{3}{F} x}{B +} \frac{\frac{2}{F} x}{A +} \frac{\frac{1}{F} x}{F a - F x}$$

en y changeant x en $F^{-1} 0$.

Cette solution simple d'un problème si illimité est utile autant que neuve.

Application très particulière.

$$F x = F 0 + \frac{x}{A +} \frac{x-1}{B +} \frac{x-2}{C +} \frac{x-3}{D +} \text{etc. donne ainsi}$$

$$N = - \frac{1}{M +} \frac{2}{L +} \frac{3}{K +} \dots \frac{n-2}{B +} \frac{n-1}{A +} \frac{n}{F a - F n}$$

§. 15. Si $F x = 0$ annule toutes les fonctions précédentes, il faut sommer la fraction continue valeur de N , et la différentier haut et bas n fois selon x . Le §. 13. nous en fournit les moyens.

Exemple le plus particulier. Développer Fx en fraction continue à numérateurs x : c'est à dire

$$Fx = F_0 + \frac{x}{A +} \frac{x}{B +} \frac{x}{C +} \text{ etc.}$$

Les formules combinatoires du §. 13. différenciées des deux parts, donnent, en nous souvenant que $1' 2' 3'$ etc. sont tous égaux à x et qu'on a $0, = F_0 - Fx$, $1, = A$, $2, = B$, $3, = C$, etc.

$$A = \frac{1}{F_0}, B = -\frac{2 \cdot 1 F_0}{A \cdot 2 F_0}, C = -\frac{3 A \cdot 3 F_0}{AB \cdot 3 F_0 + 3 \cdot 2 F_0}$$

$$D = -\frac{4 A B \cdot 3 F_0 + 6 \cdot 2 F_0}{ABC \cdot 4 F_0 + 4(A + C) \cdot 3 F_0}$$

$$E = -\frac{5 A B C \cdot 4 F_0 + 10(A + C) \cdot 3 F_0}{ABCD \cdot 5 F_0 + 5(AB + AD + CD) \cdot 4 F_0 + 10 \cdot 3 F_0}$$

et ainsi de suite : nous savons la loi des coefficients littéraux et numériques des quantités différentielles. $1 F_0$

signifie $\frac{dFx}{dx}$ pour $x = 0$ après la réduction ; $2 F_0$ est

$\frac{d^2 Fx}{dx^2}$ à la même condition, etc.

On trouve de la sorte

$$x^{\frac{1}{2}} \text{Atang}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x}{1 +} \frac{x}{3 +} \frac{4x}{5 +} \frac{9x}{7 +} \frac{16x}{9 +} \frac{25x}{11 +} \text{ etc.}$$

Exemple plus étendu. De $fx = 0$ conclure Fx en fraction continue d'une arbitraire.

$$Fx = Fa + \frac{fx - fa}{A +} \frac{fx - fa}{B +} \frac{fx - fa}{C +} \text{ etc. a}$$

les mêmes coefficients qu'en haut ; à cela près que

$$1 F_0 = \frac{dFa}{dfa}, 2 F_0 = \frac{d^2 Fa}{dfa^2}, \text{ et ainsi de suite. En}$$

supprimant fx nulle par supposition, reste

D

$Fx = Fa - \frac{fa}{A} - \frac{fa}{B} - \frac{fa}{C} - \frac{fa}{D} \text{ etc.}$ Retour de suite en fraction continue.

§. 16. *La Produit* $\frac{Fx}{Fa} = (1 + AF^1x)(1 + BF^2x) \dots$

$\dots(1 + NF^n x)$ etc. se traite à peu près de même. J'en ai assez dit pour une simple esquisse. Ayant donné des résultats moins limités que ceux connus jusqu'aujourd'hui, j'espère avoir justifié le titre de **Développement général**. On me dispensera ici de l'appliquer à plusieurs variables et de montrer au long l'emploi des fonctions indépendantes qui rendent le calculateur maître de chaque terme de la suite, sans que la loi se perde. Je réserve ces détails et l'amplification de la méthode pour un traité d'Analyse fonctionnaire où je prouverai, s'il en est encore besoin, que les procédés combinatoires, moins bornés et ordinairement plus directs que les différentiels, ne sont pas moins rigoureux c'est à dire, analytiques.

Sans l'analyse combinatoire, manifeste ou déguisée, le calcul fonctionnaire n'est qu'un chaos des réductions décourageantes. Oserai-je le dire? Sans l'amalgame complet des deux méthodes, la logique mathématique qu'on nomme vaguement **ANALYSE** n'atteindra jamais la perfection dont elle est susceptible.

III.

POLYNOME COMBINATOIRE.

On voudra bien me permettre quelques considérations préliminaires.

Le nombre est une réponse à la question : combien ? D'après cette définition tirée de la nature de la quantité directe et intelligible pour tout le monde, non seulement $0, 1, 2, 3$, etc., $\frac{1}{2}, 3\frac{1}{5}$, $\sqrt{2}, \infty, -1, \sqrt{-1}$, etc., mais encore tant, plusieurs, quelque, etc., sont des nombres.

Au lieu d'écrire et de prononcer au long, un nombre quelconque, un autre nombre quelconque, un troisième nombre quelconque, etc., les analystes modernes se servent des lettres alphabétiques en recourant au besoin à différens alphabets, à des traits, des points et chiffres distinctifs. Quelque commode que soit cet expédient, sur tout pour l'impression, les chiffres renfermés dans un angle, un arc de cercle ou autre figure simple, sont bien supérieurs : en rendant l'algèbre toute numérique, ils aident l'oeil à découvrir les loix compliquées. Les Arabes se servirent, je crois, les premiers de ces symboles parlans qu'on a laissé tomber en désuétude, faute de connaître leurs avantages. LEIBNITZ et NEWTON ont cherché à les faire revivre pour d'autres usages : mais heureusement on ne les a pas imités, et ces signes sont en ce moment une terre vierge, dont on peut tirer un meilleur parti, comme on le verra dans mon *Essai de Caractéristique Combinatoire*.

Les abréviations méthodiques étant l'âme du calcul, celles dont se sert Diophante sont assurément plus anciennes; et malgré cela notre algèbre a été tant de siècles à se former, parce que les progrès de l'esprit humain ne se font jamais par sauts considérables. Ajoutons que beaucoup d'idées fécondes meurent dans la tête ou le portefeuille des auteurs, et que publiées le monde savant n'y fait souvent pas de longtems attention.

CARNOT, dans sa Théorie des machines, soupçonne qu'une révolution aussi heureuse que celle qui a changé la face de la Chymie, attend les Mathématiques. Dans une science où le fond n'est pas susceptible de changement, elle ne peut avoir lieu que pour la caractéristique écrite et parlée, et tout au plus pour une méthode plus lumineuse dans les élémens: on sent depuis longtems que ceux-ci pourraient être à la fois plus riches et moins volumineux, et que les idées y pourraient quelques fois être mieux fixées. Ce n'est qu'en perfectionnant la science combinatoire qu'on y parviendra.

Chiffre signifie en général un signe de quantité élémentaire, commode pour la combinaison. Les chiffres arithmétiques, liés par des conditions de numération, sont les élémens du nombre ordinaire: les lettres, symboles de nombres indéterminés, constituent de la même manière les élémens de la fonction. Sous cet aspect les lettres de l'analyste sont des chiffres algébriques, ses fonctions sont des nombres algébriques; et l'algèbre, ou plutôt l'analyse, est réellement une arithmétique universelle, comme NEWTON la nomma. Il s'ensuit encore qu'une fonction est le résultat éventuel de certaines opérations numériques à faire avec des nombres, dont on considère un ou plusieurs comme variables, c'est à dire, susceptibles de valeurs arbitraires.

Afin de mieux comparer les nombres et les combiner plus facilement, l'arithméticien les ordonne en série des puissances de dix, et l'algébriste les développe ordinairement en série d'une variable. Je dis, ordinairement; car souvent d'autres développemens méritent la préférence.

Si l'on compte pour rien les longueurs, le binome Newtonien suffit pour exécuter tous les développemens: le théorème de TAYLOR aux différences finies en est une grande et utile généralisation, quoiqu'il n'évite pas toujours les circuits et qu'il laisse souvent échapper la loi. Le calcul des différences de toute espèce n'a point d'autre base. Une méthode développatoire plus sûre est l'Analyse Combinatoire ou l'Arithmétique universelle ordinale, en prenant ordinal dans le sens le plus étendu, comme adjectif d'ordre. Ce rapprochement, que personne que je sache n'a encore fait, LEIBNITZ semble l'avoir senti, à en juger par divers passages de ses oeuvres, par les coefficients qui portent son nom et par son projet d'une idéographie numérique, au moyen de laquelle il se promettait de calculer le raisonnement. Cette ouverture fût suivie en partie par MOIRE, Bernoulli et BOSCOWICH; mais le Professeur HINDENBURG, qui pour l'étendue et la facilité des procédés laissa ses devanciers si loin derrière lui qu'on peut dire qu'il a inventé l'Analyse Combinatoire, réalisa le premier l'idée confuse de LEIBNITZ, en rappelant toutes les règles fondamentales de la science à construire des nombres avec des chiffres donnés, individuellement ou en somme. Pour conserver à cette considération toute la généralité qui lui convient, il faut prendre etc. $+ 10^{2a} + 10^a + 1 + 10^{-a} + 10^{-2a} +$ etc. pour échelle de numération. En pratique a passe rarement 1 ou 2.

Après l'exécution arithmographique des règles combinatoires, HINDENBOURG a donné la lexicographique, qui ordonne les files égales ou inégales comme les mots d'un dictionnaire, et la stélégraphique, qui assemble les files horizontales d'après quelque loi dans les rangs verticaux. En attendant que je fasse mieux connaître ces différens procédés, je remarquerai que tous constituent un Calcul ordinal, ou des rapports de situation, absolument indépendant de l'analyse vulgaire, sans pourtant lui devenir étranger. J'avertis les personnes curieuses d'étudier la triple méthode de HINDENBOURG dans les ouvrages mêmes de ce savant, que ses premiers *) n'en contiennent que le germe et n'ont plus en ce moment qu'une valeur historique. Le perfectionnement de l'Analyse Combinatoire se trouve dans les cahiers de l'Archive mathématique, dont l'onzième a paru cette année, dans les première et seconde Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen, publiées par HINDENBOURG et imprimées à Léipsic dans ces derniers tems. Les étrangers, qui ne savent pas l'allemand, langue aujourd'hui si nécessaire à tous les gens des lettres, peuvent y suppléer par les Disquisitiones analyticae du Professeur PFAFF, ouvrage qui a obtenu l'estime générale et qui contient près de cent pages sur cette matière.

Dans mon Traité d'Analyse fonctionnaire combinatoire, assez avancé déjà pour voir peut-être bientôt le jour, j'ai tâché d'étendre le domaine des combinaisons, en les alliant intimement avec le calcul des différences. J'ai surtout été soigneux de sim-

*) *Infinitorum dignitatum historia, leges ac formulae*; Göttingae 1779. *Novi systematis permutationum, combinationum ac variationum primae lineae*; Lipsiae 1781, etc.

plifier les deux analyses, en dégagant leurs avenues, de certaines épines qu'on leur reproche. En disant ceci, je ne prétens certainement pas jeter de l'ombre sur les travaux de mes prédécesseurs à qui je dois tout; je ne veux qu'annoncer le point de vue de mon traité. La rédaction des découvertes d'autrui est si peu de chose en elle même, que pour se la faire pardonner du public, il faut du moins améliorer ou faciliter la forme. Au commencement d'une science tout est important et on ne saurait être trop détaillé: mais a-t-elle pris consistance et veut-on la présenter en corps de doctrine, il faut s'attacher à une précision énergique et supprimer les accessoires stériles: sinon, chaque méthode devient une bibliothèque, et le studieux perd le courage de l'entâmer; principalement de nos jours, où l'homme de lettres doit savoir un peu de tout, c'est à dire, une infinité de choses. C'est plus que jamais l'occasion de s'écrier avec Hippocrate:

Ὁ ἑὶς βραχύς, ἢ δὲ τέχνη μακρὴ, ἢ δὲ κρίσις χαλεπή.

Mon traité, comme ouvrage étendu, n'est pas tout à fait dans le goût de l'échantillon combinatoire, que j'offre en attendant aux amateurs étrangers, et qui n'embrasse que cette proposition:

Dans $F(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) = Fa + A \frac{x}{1} + B \frac{x^2}{1.2} + C \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ déterminer immédiatement le coefficient général N.

Le Professeur ARBOGAST a récemment résolu le problème avec une élégance qui laisse peu à désirer. Sa transformation des quantités indépendantes c, d, e, etc. en Dérivées de b, et de les différentier comme si aucune différence n'était constante, pour remettre successivement c, d, etc. à la place de leurs équivalens différentiels, est une idée éminemment ingénieuse. Cela

x l'expédient

n'empêche point que les proc^{és} directement combinatoires de HINDENBOURG ne mènent encore plus vite au but. Montrons le, mais auparavant voyons jusqu' où parvient le simple calcul différentiel, afin qu' on puisse mieux juger de la différence des méthodes.

§. I. En supposant $b + cx + dx^2 + \text{etc.} = fx$,
 $\frac{dFa}{da} = A'$, $\frac{d^2Fa}{da^2} = B'$, $\frac{d^3Fa}{da^3} = C'$, etc., le théo-
 rème de TAYLOR donne

$$F(a + xfx) = Fa + A \frac{x}{1} + B \frac{x^2}{1.2} + C \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= Fa + A' \frac{xfx}{1} + B' \frac{(xfx)^2}{1.2} + C' \frac{(xfx)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Cette équation différentiée n fois selon x , devient

$$N + O \frac{x}{1} + P \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} = \frac{A'}{1} \frac{d^n(xfx)}{dx^n} +$$

$$+ \frac{B'}{1.2} \frac{d^n(x^2fx^2)}{dx^n} + \dots$$

$$+ \frac{N'}{1.2\dots n} \frac{d^n(x^nfx^n)}{dx^n} + \text{etc.}$$

d' où par x nul, condition qui annulle

$$d^n(x^{n+r}fx^{n+r}) : dx^n,$$

$$N = \frac{A'}{1} \frac{d^n(ofo)}{do^n} + \frac{B'}{1.2} \frac{d^n(o^2fo^2)}{do^n} + \dots$$

$$\dots + \frac{N'}{1.2\dots n} \frac{d^n(o^nfo^n)}{do^n},$$

le o signifiant ici, qu' on change x en o après la diffé-
 rentiation. Par le théorème $d^n(pq) = p d^n q +$
 $+ \frac{n}{1} dp. d^{n-1} q + \text{etc.}$ nous obtiendrons enfin cette
 expression simplifiée;

$$N = \frac{n}{1} \cdot \frac{A'}{1} \frac{d^{n-1} f_0}{d o^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{B'}{1 \cdot 2} \frac{d^{n-2} f_0}{d o^{n-2}} + \dots + \frac{N'}{1 \cdot 2 \dots n} f_0^n. \quad (I)$$

Si nous différencions $F a + A \frac{x}{1} + \text{etc.} = F a + A' x f x + \text{etc.}$ n fois selon $d(x f x)$ constante, l'annulation de x procure $\frac{A}{1} \frac{d^n o}{d(o f o)^n} + \frac{B}{1 \cdot 2} \frac{d^n o^2}{d(o f o)^n} + \dots + \frac{N}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n o^n}{d(o f o)^n} = N'.$

Remarquons que pour le cas de $x = o$, la formule conversionnelle (Dev. gén. §. 6.) change

$$\frac{d^n x^r}{d(x f x)^n} \text{ en } \frac{d^{n-1} \left[\frac{d x^r}{d x} \left(\frac{x-o}{x f x - o f o} \right)^n \right]}{d x^{n-1}} = \frac{r d^{n-1} [x^{r-1} f x^{-n}]}{d x^{n-1}}, \text{ en}$$

réduisant et nous souvenant que x seul est soumis à la différentiation. Le théorème $d^n(p q) = p d^n q + \text{etc.}$ et la substistution finale de o à x changeront cette forme

$$\text{en } r(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \frac{d^{n-r} f_0^{-n}}{d o^{n-r}} = \frac{d^n o^r}{d(o f o)^n}.$$

Prenons successivement $r = 1, 2, \text{etc.}$ et substituons,

$$\text{il vient enfin } N' = A \frac{d^{n-1} f_0^{-n}}{d o^{n-1}} + \frac{n-1}{1} B \frac{d^{n-2} f_0^{-n}}{d o^{n-2}} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} C \frac{d^{n-3} f_0^{-n}}{d o^{n-3}} + \dots + N f_0^{-n}. \quad (II)$$

Les relations réciproques I et II sont remarquables en ce que F et f caractérisent des fonctions quelconques.

L'évaluation de $\frac{d^{n-r}.f_0^n}{d_0^{n-r}}$ et $\frac{d^{n-r}.f_0^{-n}}{d_0^{n-r}}$ se

réduit à élever $fx = b + cx + dx^2 + \text{etc.}$ aux puissances r et $-n$ pour ne conserver des développemens respectifs que le coefficient de x^{n-r} multiplié par $1.2.3..n-r$. Au moyen du calcul différentiel on obtient assez facilement ce coefficient en série récurrente: mais comme ce n'est pas ce que nous voulons, passons aux procédés combinatoires.

§. 2. Le développement de f_0^r se chargeant de coefficients numériques qui embrouillent bientôt la loi, partons d'un produit de séries différentes, et pour rendre l'exécution typographique moins sujette à équivoque, prenons X pour variable. Nous aurons tant de séries que nous voudrons au moyen de la notation suivante en coefficients Leibnitziens.

$$X = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + + \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.}^*)$$

N sera toujours le coefficient de X^N . La série définie

$$\overset{q}{t}.X^t + \overset{q}{t+1}.X^{t+1} + \overset{q}{t+2}.X^{t+2} + + \overset{q}{u}.X^u$$

s'indiquera par $t \overset{q}{X} u$, et son coefficient général par $t \overset{q}{N} u$. Dans cette expression je nommerai constamment q la

Pour faciliter aux étrangers la lecture immédiate des ouvrages combinatoires de HINDENBOURG, j'expliquerai sa notation aux endroits convenables de cet écrit, qui en deviendra d'autant plus intelligible pour les géomètres-combinateurs allemands. $\kappa 1, \kappa 2.. \kappa n$ designent Coefficient premier, second... nième

$$*) \overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + + \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.} \text{ est chez HINDENB.}$$

$$p = \kappa 1.x + \kappa 2.x^2 + \text{etc.} \text{ et } \overset{q}{N} \text{ est } p \kappa n \text{ chez lui.}$$

$$\overset{q}{X}^{(d)} = \overset{q}{t}.X^t + \overset{q}{t+d}.X^{t+d} + + \overset{q}{u}.X^u \text{ est chez H.}$$

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + + A^{nd}x^{m+nd} + \text{etc.}$$

marque, t et u les indices. La marque équivalent à des traits. $\overset{4}{N} = N''''$.

Si la différence des exposans était d, on noterait

$\overset{q}{X}_u^{(d)}$ et $\overset{q}{N}_u^{(d)}$. Ces formes sont un peu chargées, parce qu'elles apprennent cinq circonstances de la série.

Exemples, $\overset{0}{X} = \overset{0}{1} \cdot X + \overset{0}{2} \cdot X^2 + \overset{0}{3} \cdot X^3 + \text{etc.},$

$\overset{1}{X} = \overset{1}{2} \cdot X^2 + \overset{1}{3} \cdot X^3 + \overset{1}{4} \cdot X^4 + \text{etc.},$

$\overset{2}{X}_3 = \overset{2}{0} + \overset{2}{1} \cdot X + \overset{2}{2} \cdot X^2 + \overset{2}{3} \cdot X^3 +,$

$\overset{(3)}{X}_{10} = \overset{-}{1} \cdot X + \overset{-}{4} \cdot X^4 + \overset{-}{7} \cdot X^7 + \overset{-}{10} \cdot X^{10},$

$\overset{(7)}{X}_{\emptyset} = \overset{\cdot}{5} \cdot X^5 + \overset{\cdot}{2} \cdot X^{-2} + \overset{\cdot}{\emptyset} \cdot X^{-9};$

Les chiffres barrés, dont on ne se sert plus dans la division, signifient chez moi des chiffres négatifs. Ainsi $\bar{2}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\emptyset$, équivalent à -2 , -5 , -7 , -9 ; $8008008 = 7991992$, $L_{\bar{2}\bar{5}\bar{5}\bar{5}} = \bar{3}, 3010300$. La caractéristique barrée n'induit jamais les commençans en erreur comme le complément arithmétique. Je donnerai dans une autre occasion le calcul extrêmement rapide des chiffres négatifs, par lequel on extrait en trois minutes une racine quarrée de douze figures.

§. 3. Pour abréger avec clarté une fonction d'une ou de plusieurs séries marquées, je surmonterai leur variable commune de la même fonction de leurs marques: moyennant quoi

$$\overset{q}{F} \overset{q}{X} = \overset{Fq}{X} = \overset{Fq}{0} + \overset{Fq}{1} \cdot X + \overset{Fq}{2} \cdot X^2 + \dots + \overset{Fq}{N} \cdot X^N + \text{etc.} \quad *)$$

$\overset{Fq}{N}$ est donc le coefficient de X^N dans le développe

$$*) \quad \overset{q}{F} X = \overset{q}{X} = \text{etc.} + \overset{Fq}{N} \cdot X^N + \text{etc. est chez H.}$$

$$Fp = \kappa_0 + \kappa_1 \cdot x + \kappa_2 \cdot x^2 + \text{etc. et mon } \overset{Fq}{N} \text{ est son } (Fp)_{\kappa\kappa}.$$

ment de la fonction d'une série dont les coefficients sont marqués de q traits.

$$F(X, X) = \text{etc.} + \overset{F(p,q)}{N} \cdot X^N + \text{etc.} \quad \text{Ainsi de suite}$$

E x e m p l e s.

$$\overset{p}{X} \cdot \overset{q}{X} = \overset{pq}{X} = 2 \cdot \overset{pq}{X^2} = 3 \cdot \overset{pq}{X^3} + \dots + \overset{pq}{N} \cdot \overset{pq}{X^N} + \text{etc.}$$

$$\overset{p}{X} : \overset{q}{X} = \overset{p:q}{X} = 0 + 1 \cdot \overset{p:q}{X} + 2 \cdot \overset{p:q}{X^2} + \dots + \overset{p:q}{N} \cdot \overset{p:q}{X^N} + \text{etc.}$$

$$\overset{r}{X} \cdot \overset{r-1}{X} \cdot \overset{r-2}{X} \dots \overset{1}{X} = \overset{r \dots 1}{X} = r \cdot \overset{r \dots 1}{X^r} + (r+1) \cdot \overset{r \dots 1}{X^{r+1}} + \dots + \overset{r \dots 1}{N} \cdot \overset{r \dots 1}{X^N} + \text{etc.}$$

En prenant toutes les marques q , ce produit de séries devient une puissance et on a

$$(\overset{q}{X})^r \text{ ou } \overset{q}{X}^r = \overset{q^r}{X} = r \cdot \overset{q^r}{X^r} + (r+1) \cdot \overset{q^r}{X^{r+1}} + \dots + \overset{q^r}{N} \cdot \overset{q^r}{X^N} + \text{etc.}$$

$$(\overset{q}{X})^{-r} \text{ ou } \overset{q}{X}^{-r} = \overset{q^{-r}}{X} = 0 + 1 \cdot \overset{q^{-r}}{X} + 2 \cdot \overset{q^{-r}}{X^2} + \dots + \overset{q^{-r}}{N} \cdot \overset{q^{-r}}{X^N} + \text{etc.}$$

L se lisant „Logarithme naturel de” $L^2 a$ est, par les principes fonctionnaires du Développement général, la même chose que LLa et $L^{-1}a$ équivaut à $2,71828183^a$. Ceci suffit pour comprendre

$$L(\overset{q}{X}) = \overset{Lq}{X} = 1 \cdot \overset{Lq}{X} + 2 \cdot \overset{Lq}{X^2} + \dots + \overset{Lq}{N} \cdot \overset{Lq}{X^N} + \text{etc.}$$

$$L^{-1}(\overset{q}{X}) = \overset{L^{-1}q}{X} = 1 + 1 \cdot \overset{L^{-1}q}{X} + 2 \cdot \overset{L^{-1}q}{X^2} + \dots + \overset{L^{-1}q}{N} \cdot \overset{L^{-1}q}{X^N} + \text{etc.}$$

Voilà assez d'éclaircissemens. Ma tachygraphie parlante, où chaque coefficient porte sa généalogie au front, est analytique autant que combinatoire. Dans l'Essai de Caractéristique Combinatoire, ouvrage dont je grave actuellement les planches, j'ai étendu cette notation à plusieurs variables, et au moyen du cadre $\overline{\quad}$, je l'ai tellement préservée d'équivoque qu'on peut, dans les grands calculs, mêler, sans avertissement, les fonctions combinatoires avec les fonctions analytiques ordinaires. Les formes tronquées

aux quelles m'oblige l'impression, me suffisent aujourd'hui, et avec un peu d'attention le lecteur ne s'y trompera point.

$$\bar{X} = \bar{1}.X + \bar{N}.X^N + \text{etc. est } |\bar{x}| = |\bar{1}|x + |\bar{n}|x^n + \text{etc.}$$

dans les formes à cadres. Mais revenons à $\bar{N}$ et $\bar{N}^q$.

$$\S. 4. \text{ Dans } X = \overset{r \dots 1}{r}.X^r + \overset{r \dots 1}{r+1}.X^{r+1} + \dots + \overset{r \dots 1}{N}.X^N + \text{etc.}^*)$$

$\bar{N}$ consiste en une somme de produits r^{naires} ou de r facteurs, et la somme des numéros de chaque r^{naire} y est toujours l'exposant de X^N . Il n'y a donc qu'à écrire tous les nombres r^{naires} à somme N des chiffres, les surmonter par ordre des marques $r, r-1, r-2$, jusques 1, et leur préposer enfin $+$, pour avoir la va-

leur de $\bar{N}$. Les chiffres dont je parle appartiennent à l'échelle etc. $+ 10^{2a} + 10^a + 1$.

Exemple 1^r. On demande le coefficient de X^7 du développement de

$$X = (\overset{3 \dots 1}{1}.X + \overset{3}{2}.X^2 + \text{etc.}) (\overset{2}{1}.X + \text{etc.}) (\overset{1}{1}.X + \text{etc.}).$$

$N = 7$ donne ici

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{3 \dots 1}{7} = & \overset{3 \ 2 \ 1}{+ 115} & \overset{3 \ 2 \ 1}{+ 214} & \overset{3 \ 2 \ 1}{+ 412} & \overset{3 \ 2 \ 1}{+ 511} & & \\ & \overset{1 \ 2 \ 4}{124} & \overset{2 \ 2 \ 3}{223} & \overset{4 \ 2 \ 1}{421} & & & \\ & \overset{1 \ 3 \ 3}{133} & \overset{2 \ 3 \ 2}{232} & & & & \\ & \overset{1 \ 4 \ 2}{142} & \overset{2 \ 4 \ 1}{241} & & & & \\ & \overset{1 \ 5 \ 1}{151} & & & & & \end{array}$$

Les marques 3, 2, 1 et le signe $+$ sont censés répétés à chaque produit. Je l'avertis une fois pour tou-

$$*) X = \overset{r \dots 1}{r}.X^r + \dots + \overset{r \dots 1}{N}.X^N + \text{etc. est chez H.}$$

$u \dots rqp = u \overset{r \dots 1}{r}.X^r + u(r+1).X^{r+1} + \text{etc.}$, et N est chez lui $(u \dots qp)_{nn}$ en avertissant que les séries multipliées sont au nombre de r .

tes. On sait que $\overset{3}{1} \overset{2}{1} \overset{1}{5} = 1.1.5$, et ainsi des autres. La suppression des points ne peut occasionner de l'ambiguïté.

Quant à la meilleure manière de trouver tous les nombres r^n à somme donnée des chiffres, c'est d'écrire, comme j'ai fait, d'abord le plus petit nombre, puis l'immédiatement plus grand, puis le suivant; on continue de la sorte jusqu'à ce qu'on parvienne au premier r^n renversé, et il en résulte une Colonne rangée, c'est à dire, de nombres ascendants. Lorsque la colonne devient longue, on peut la rompre en sections.

Cette solution du problème ne laisse rien à désirer pour la simplicité: elle est, comme on voit, une conséquence de ma notation Leibnitzienne, qui, pour être à la fois analytique et combinatoire, ne demande ni traduction ni explication.

$\overset{p}{1}, \overset{p}{2}, \text{etc.}; \overset{q}{1}, \overset{q}{2}, \text{etc.}$, équivalent à $a, b, \text{etc.}$ marqués de p ou q traits, avec la différence pourtant que les nombres constituent un ordre plus expressif que celui des lettres, et que leur suite n'est pas bornée comme celle des alphabets. *) La marque empêche de confondre le coefficient Leibnitzien, nombre quelconque, avec les nombres vulgaires, et 3.8 n'en est pas moins clair que $3h''''''''$ ou $3h_{ix}$. Ici il faut même souvent un $\&$ d'avertissement pour discerner l'indice d avec un exposant.

*) HINDENBOURG qui a su tirer tout le parti possible des lettres, aggrandit indéfiniment les alphabets, en notant N^{+q} la $q^{i\text{ème}}$ lettre après N , et N^{-q} la $q^{i\text{ème}}$ lettre précédente. Dans ma notation à cadres ce serait $|\overline{n+q}|$ et $|\overline{n-q}|$; $|\overline{n}|$ équivalant à N .

Exemple 2^e. Construire le coefficient de X^{22} dans

le développement de $X_{10}^{(3)} =$

$$(1 \cdot X + 4 \cdot X^4 + 7 \cdot X^7 + 10 \cdot X^{10}) (1 \cdot X + 4 \cdot X^4 + 7 \cdot X^7 + 10 \cdot X^{10}) (1 \cdot X + 4 \cdot X^4 + 7 \cdot X^7 + 10 \cdot X^{10})$$

Ce coefficient est $22_{10}^{(3)} =$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 1 \\ + & 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 & + & 4 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 10 & + & 7 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10 & + & 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \\ 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 & 4 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 7 & 7 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 & 10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 7 & 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 & 7 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 4 & 10 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 4 \\ 1 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 10 & 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 & 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 10 & 10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 \\ 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 & 4 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 4 & 7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 & 10 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 4 & 4 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 10 & 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 & 10 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ 1 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 & 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 7 & 7 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 1 & 10 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 1 \\ 1 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 7 & 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 & 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 7 & 10 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 & 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 1 & 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4 & 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 & 4 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 7 & 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 & 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \\ & 4 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 4 & 7 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 4 & \\ & 4 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 1 & 7 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 1 & \end{array}$$

§. 5. N , coefficient général du développement de

$X = (1 \cdot X + 2 \cdot X^2 + 3 \cdot X^3 + \text{etc.})^r$ ne diffère de N , qu'en ce que toutes les marques sont q , ce qui rend égaux les facteurs à même numéro. Il suffira donc d'écrire les r^{naires} rangés, à somme N des numéros-chiffres, en préposant à chaque r^{naire} le $+$ et le nombre des permutations, dont ses numéros sont susceptibles.

J'entens par r^{naire} rangé un nombre de r chiffres dans lequel un chiffre moindre ne suit jamais un plus grand 2359, 6666, 4477 sont des 4^{naires} rangés;

844222 est un 6^{naire} rangé à rebours; 511, 1409, 31204 ne sont rangés dans aucun sens.

Exemple 1^r. On veut savoir le coefficient de X^7 du développement de $X = (1.X + 2.X^2 + \text{etc.})^3$. La forme du paragraphe précédent, nous donne tout de suite en employant les coefficients numériques de permutation,

$$\begin{aligned} 7 &= 3 \cdot \overset{q^3}{115} + 6 \cdot \overset{q}{1} \overset{q}{2} \overset{q}{4} + 3 \cdot \overset{q}{1} \overset{q}{3} \overset{q}{3} + 3 \cdot \overset{q}{2} \overset{q}{2} \overset{q}{3} \\ &= 3 \cdot \overset{q^2}{1^2} \cdot 5 + 6 \cdot \overset{q}{1} \cdot \overset{q}{2} \cdot \overset{q}{4} + 3 \cdot \overset{q}{1} \cdot \overset{q}{3^2} + 3 \cdot \overset{q}{2^2} \cdot \overset{q}{3} \end{aligned}$$

C'est sans doute une précaution superflue que d'avertir que 1^2 et 3^2 , quarrés de 1 et 3, ne doivent pas se prendre pour $\overset{q^2}{1}$ et $\overset{q^2}{3}$, coefficients du développement de $X = (1.X + \text{etc.})^2$.

Exemple 2^d. Dans $X_{10}^{(3)}$ déterminer le coefficient de X^{22} . Il est, en mettant un coefficient de permutation à chaque 4^{naire} rangé du second exemple du §. 4,

$$\begin{aligned} 22_{10}^{(3)} &= \\ 6 \cdot \overset{q}{1^2} \cdot \overset{q}{10^2} &+ 24 \cdot \overset{q}{1} \cdot \overset{q}{4} \cdot \overset{q}{7} \cdot \overset{q}{10} + 4 \cdot \overset{q}{1} \cdot \overset{q}{7^3} + 6 \cdot \overset{q}{4^2} \cdot \overset{q}{7^2} + 4 \cdot \overset{q}{4^3} \cdot \overset{q}{10}. \end{aligned}$$

Dans ces deux exemples nous avons déduit les coefficients numériques 3, 6, 3, 3 et 6, 24, 4, 6, 4, de la permutation réelle. Comme ce procédé mettroit bientôt des bornes aux solutions praticables, on sent combien il serait avantageux de n'écrire que les seuls numéros-nombres rangés et de leur préposer de tête, ou avec peu de calcul, les coefficients de permutation. Développons donc cette théorie, où la plus grande gé-

généralité aura encore la prérogative de mieux présenter la loi.

§. 6. Arranger m chiffres différens en r^{naires} .

2^{naires} . Un des m chiffres ayant la gauche, les $m - 1$ chiffres restans formeront autant de binaires avec lui. Mais chacun des m chiffres peut avoir la gauche; donc en tout $m(m - 1)$ binaires possibles.

3^{naires} . Un des m chiffres ayant la gauche, les $m - 1$ restans formeront $(m - 1)(m - 2)$ binaires à sa droite, et partant autant de ternaires avec lui. Et comme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des 3^{naires} est $m(m - 1)(m - 2)$.

4^{naires} . Un des m chiffres ayant la gauche, les $m - 1$ restans formeront $(m - 1)(m - 2)(m - 3)$ ternaires à sa droite, et partant autant de quaternaires avec lui. Et comme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des 4^{naires} est $m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$.

Le raisonnement demeurant le même pour les 5^{naires} , 6^{naires} , etc., et le nombre des facteurs régulièrement décroisans étant toujours celui des places, il en résulte le théorème suivant, qui est la base de toute l'Analyse Combinatoire de quantité.

„ m chiffres peuvent s'arranger en n^{naires} de $m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1)$ manières.“

Comme on peut numérotter chaque suite d'individus et supposer un ordre dans des places situées où l'on veut, la solution a toute la généralité imaginable. On n'oubliera pas que les chiffres dont je parle appartiennent au système 10^{a} .

Si la recherche du nombre des r^{naires} appartient à l'analyse de quantité, celle de la forme des r^{naires} est du ressort de l'analyse de qualité, science qui est encore au berceau, à bien des égards.

On arrange le mieux en ^{naïres} en partant toujours des chiffres les plus bas; et alors la marche que j'ai suivie en démontrant, donne une colonne rangée. Quand elle est construite, on vérifie son exactitude par le nombre connu des arrangemens. L'exercice apprend les règles partielles plus vite qu'un énoncé verbal qui ne saurait être court.

Exemple d'analyse de quantité. On a les 25 lettres de l'alphabet dans une urne: en tirant dix fois de suite une lettre, quelle probabilité y a-t-il qu'on obtiendra le mot bon ef ac ius, dont beaucoup de marchands se servent au lieu de 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 pour cryptographier leurs prix?

Le nombre des ^{naïres} possibles avec 25 numéros-chiffres est 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16, parmi lesquels il n'y a que le seul 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 qui puisse former bon ef ac ius. En faisant le calcul on trouvera donc la probabilité

$$1 : 11861676287999$$

Si 1000 écrivains livraient chacun 10000 dénaires par jour, il leur faudrait plus de 3249 années pour les écrire tous.

Quand nous voyons de l'ordre dans une longue suite de choses qui pourraient être disposées autrement, notre raison en conclut un dessein; c'est à dire une intelligence qui a présidé à leur arrangement: plus le nombre des dispositions possibles est grand, plus les époques où elles reviennent sont fréquentes, plus la conclusion acquiert du poids. Comme tout ce que nous appercevons dans le monde physique porte ce caractère expressif d'ordre qui dure depuis un tems infini; il y a donc ∞^∞ à parier contre 1 que l'ordre que nous appercevons dans le monde n'est pas l'effet d'une fatalité aveugle. Mais, dit le *Système de la Nature*, puisque les choses doivent être arrangées de quelque ma-

nière, il ne faut pas s'étonner qu'elles le soient de la manière actuelle: tout étant conséquence de loix nécessaires, les phénomènes qui annoncent le plus de dessein, tels que la structure des corps organiques, la conservation des espèces, ne sont au fond qu'un résultat surprenant obtenu par des dés pipés. L'auteur oublie que des dés pipés prouvent une intelligence qui les a pipés et que notre raison juge d'après la probabilité et non d'après l'événement. Aussi, malgré toutes les objections, le dessin manifesté que présente un oeil, un pied, une aile, etc., démontre un être suprême. Cette preuve, sans contredit la meilleure de toutes, est due à la théorie des combinaisons.

Exemple d'analyse de qualité. Déterminer les amalgames possibles à trois, en quotités différentes données, des métaux les plus pésans; le platine, l'or, le tungstène et le mercure.

Numérotions ces métaux 1, 2, 3, 4 et désignons les quotités par les marques arbitraires 1, 2, 3, nous trouverons $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ amalgames possibles, que voici:

+	3 2 1	+	3 2 1	+	3 2 1	+	3 2 1	*)
	1 2 3		2 1 3		3 1 2		4 1 2	
	1 2 4		2 1 4		3 1 4		4 1 3	
	1 3 2		2 3 1		3 2 1		4 2 1	
	1 3 4		2 3 4		3 2 4		4 2 3	
	1 4 2		2 4 1		3 4 1		4 3 1	
	1 4 3		2 4 3		3 4 2		4 3 2	

Si l'on réfléchit que nous connaissons déjà une vingtaine de métaux, et que les quotités différentes varient tant les amalgames, on sentira combien d'expérien-

*) HINDENBOURG indique ce résultat par C' [1 2 3 4]; C troisième lettre de l'alphabet indiquant qu'on assemble à 3. Chez lui N' [1 2 3 . . m] est la colonne des *n* naires formés des chiffres 1 jusques m, qu'il nomme *Variationes simpliciter, omissis repetitionibus*.

ces il faudroit pour avoir une théorie un peu complete des composés variables 2^{naires} , 3^{naires} , 4^{naires} , etc.

§. 7. *Corollaire.* Lorsque le nombre des places est celui des chiffres, l'arrangement se réduit à une simple permutation, et $m = n$ donne ce théorème secondaire : „ n chiffres différens produisent $1. 2. 3. . n$ nombres n^{naires} par transposition.“ *)

Exemple. 0149 peuvent ainsi se permuer sur quatre places de $1. 2. 3. 4 = 24$ manières

+	0149	+	1049	+	4019	+	9014
	0194		1094		4091		9041
	0419		1409		4109		9104
	0491		1490		4190		9140
	0914		1904		4901		9401
	0941		1940		4910		9410

La seconde moitié de la colonne est la première disposée à rebours pour la suite des 4^{naires} et l'ordre de leurs chiffres.

Pour en donner une application, voyons quelles sont les arrangemens permis de ces quatre mots : omnia vincit labor improbus. En les numérotant 0, 1, 4, 9 nous trouverons que les 24 arrangemens ci-dessus donnent tous un sens clair. La traduction française, un travail opiniâtre surmonte chaque difficulté, et l'allemande, eine unermüdete Arbeit besiegt jede Schwierigkeit ne souffrent point de transposition : il en est de même dans toutes les autres langues européennes vivantes, les dialectes slaves exceptés, qui ont des cas réels. En conclure que le poète latin, dont j'ai tiré cette sentence ait eu dans sa langue plus souple plus de facilité à faire de bons vers que les poètes modernes, serait assurément abuser des combinaisons. VIRGILE n'avait pour modèle

*) HINDENB. note N' [123...n] ou Perm [123...n]

que le sublime, mais incorrect HOMÈRE: il travailla toute sa vie à l'Enéide et voulut qu'on la brûlât après sa mort; preuve que les Romains d'Auguste n'étaient pas moins délicats que nous.

§. 8. *Corollaire.* Dans le §. 6. chaque arrangement des mêmes chiffres revient dans ses 1. 2. 3. . . n permutations dont une seule est rangée. Le nombre des n^{naires} rangés est donc 1. 2. . . n fois moindre que $m(m-1) \cdot (m-n+1)$, et partant:

„ m chiffres différens donnent $\frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ nombres n^{naires} rangés.“

Exemple 1^{er}.

Soit $X = (1 + \dot{1}.X) (1 + \dot{2}.X) (1 + \dot{3}.X) \dots (1 + \dot{k}.X)$,
 $\quad \quad \quad k$

le coefficient de la puissance X^N du développement sera

$N =$ à la somme des N^{naires} rangés des chiffres Leib-
 $\quad \quad \quad k$
 nitziens $\dot{1}, \dot{2}, \dots, \dot{k}$.

Ainsi $6 = + \overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} + \overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$ les points et le
 $\quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{7} \quad 1 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \quad +$ étant censés
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{8} \quad 1 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{8} \quad$ répétés à cha-
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \quad 1 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad$ que 6^{naires}.
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{8} \quad 1 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad 1 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \quad 1 \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{8} \quad 2 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad 2 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad 2 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \quad 2 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{8} \quad 2 \overset{\cdot}{3} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad 2 \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8}$ en tout $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$
 $\quad \quad \quad 1 \overset{\cdot}{2} \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} \quad 3 \overset{\cdot}{4} \overset{\cdot}{5} \overset{\cdot}{6} \overset{\cdot}{7} \overset{\cdot}{8} = 28$ sextinaires.

Supposons $1 = 2 = \text{etc.} = 1$, chaque N^{naire} deviendra l'unité, et on aura

$$N_k = \frac{k}{1} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k-N+1}{n}$$

Donc pour ce cas,

$$(1 + X)^k = 1 + \frac{k}{1} X + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} X^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X^3 + \text{etc.} \quad *)$$

$$= 1 + \frac{k}{1} X + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} X^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} X^3 + \text{etc.}$$

Cette élégante démonstration élémentaire du binôme est due à BERNOLLI et je n'en connais pas encore de meilleure: elle suppose k entier positif, mais il est aisé de l'étendre à k négatif, rompu et même irrationnel. ARBOGAST a traité ce problème par les dérivations, page 74 et 75.

Exemple 2^d. Une application non moins connue, mais qu'il est bon de répéter encore plus souvent, c'est la théorie des loteries génoises.

Une roue de fortune, faisant l'office d'urne, contient 90 numéros dont on tire 5. On demande la probabilité d'en deviner un, deux, trois, quatre, cinq de ces numéros.

*) Les coefficients binomiaux $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \dots, \frac{N}{k}$ sont chez HIND. ${}^k_1, {}^k_2, {}^k_3, \dots, {}^k_N$. Dans ma notation à cadres, j'ai des formes plus systématiques qu'ici.

*) 90 numéros mis donnent	5 num. tirés donnent
$\frac{90}{1} \cdot 1^{\text{naires}} \text{ rangés}$	$\frac{5}{1}$
$\frac{90.89}{1.2} \cdot 2^{\text{naires}}$	$\frac{5.4}{1.2}$
$\frac{90.89.88}{1.2.3} \cdot 3^{\text{naires}}$	$\frac{5.4.3}{1.2.3}$
$\frac{90 \dots 87}{1.2.3.4} \cdot 4^{\text{naires}}$	$\frac{5 \dots 2}{1.2.3.4}$
$\frac{90 \dots 86}{1.2.3.4.5} \cdot 5^{\text{naires}}$	$\frac{5 \dots 1}{1 \dots 5}$

*) HINDENBOURG écrit les 1^{naires} , 2^{naires} , 3^{naires} etc. rangés, sans répétition, $A^{\text{`}}$ ,  $B^{\text{`}}$, $C^{\text{`}}$, etc. En général son système de notation porte sur les bases suivantes :

La romaine droite annonce des files rangées $A, B, C, \dots, N$.
(Combinations)

La romaine inclinée annonce des files permutées $A, B, C, \dots, N$.
(Variationes)

La moitié dextre de l'accent circonflexe avertit qu'on ne répète pas de chiffre ou de lettre dans la file
 $A^{\text{`}}, B^{\text{`}}, \dots, N^{\text{`}}; A^{\text{`}}, B^{\text{`}}, \dots, N^{\text{`}}.$

La moitié gauche de l'accent circonflexe avertit qu'on répète des chiffres ou lettres dans la file
 $'A, 'B, \dots, 'N; 'A, 'B, \dots, 'N.$

Les $\text{~}N$ et N d'alphabets écrits servent à distinguer les files d'un nombre quelconque de chiffres ou lettres, de N et N caractéristiques de files 13^{naires} . Comme ceux-ci ne se rencontrent presque jamais en pratique, j'aurais préféré N et N pour une classe quelconque; les correspondantes écrites nuisant à l'unité du système, outre qu'elles sont rarement d'une belle exécution typographique. Mais l'auteur a eu d'autres raisons.

Quand le nombre des choses combinées ou permutées (combinatae vel variatae) est à somme donnée de leurs numéros ou indices, on met cette somme au haut de la gauche. $m^{\text{~}}N^{\text{`}}$  et  $mN^{\text{`}}$, $m^{\text{~}}N$ et mN . Pour faire connaître ces choses, on accompagne la lettre combinatoire d'un Index
 $\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a & b & c & \dots & n \end{matrix} \right]$ qui se pose ordinairement au dessous.

il en resulte les rapports			les loteries qui donnent le plus payent.
1 : 18	par 1 ^{nairs}	ou extrait	15
1 : 400 $\frac{1}{2}$	par 2 ^{nairs}	ou ambe	300
1 : 11784	par 3 ^{nairs}	ou terne	6000
1 : 511038	par 4 ^{nairs}	ou quaterne	60000
1 : 43949268	par 5 ^{nairs}	ou quine	100000

Comparaison faite, on trouve une perte probable de la mise

par extrait	$\frac{1}{8}$		
par ambe	$\frac{1}{4}$	à peu près	
par terne	$\frac{1}{2}$	—	—
par quaterne	$\frac{7}{8}$	—	—
par quine	$\frac{438}{439}$	—	—

Il n'en faut pas davantage pour prouver l'inconséquence de ceux qui veulent forcer la fortune dans ce jeu. Sans doute on peut aventurer une somme modique quand la loterie a un but utile : mais il sera toujours sage de n'en pas contracter le goût.

Ne pas tolérer des loteries dans un pays n'est pas le moyen d'en prévenir les abus, parce que les collecteurs étrangers n'en sont que plus actifs clandestinement, pour gagner une provision de 10 à 15 pour cent. Le meilleur serait que le gouvernement tint une loterie en régie qui payât à un taux plus haut que les loteries étrangères, en imprimant sur chaque billet le desavantage des chances et cet anathème combinatoire :

„Il n'y a qu'un fou qui puisse vouloir s'enrichir aux jeux de hazard, et qu'un malhonnête homme qui puisse y risquer le bien-être de sa famille.”

§. 9. *Corollaire du §. 7.* Si parmi les n chiffres permutés, il s'en trouve r égaux, les $1. 2. 3. \dots r$ permutations de ceux-ci ne donnant qu'une seule forme, le nombre total des permutations s'abaisse à

$$\frac{1. 2. 3. \dots n}{1. 2. 3. \dots r} = (r+1) (r+2) (r+3) \dots n.$$

Et si s chiffres deviennent encore égaux entr'eux, mais non avec les précédens, il faudra de nouveau diviser le résultat obtenu par $1. 2. 3. \dots s$. En général,

„Pour trouver de combien de manières on peut permuter n chiffres dont plusieurs groupes d'égaux, divisez $1. 2. 3. \dots n$, par 2 pour chaque chiffre double; par 2. 3 pour chaque chiffre triple; par 2. 3. 4 pour chaque quadruple; et ainsi de suite.”

Il est palpable que le résultat ne saurait être qu'un nombre entier.

Exemple. Dans un voyage quelqu'un a passé une fois à Londres, deux fois à Paris et trois fois à Rome: quelles sont les manières, dont il a pû faire cette tournée?

En désignant Londres par 8, Paris par 4 et Rome par 2, on a

2 2 2 4 4 8 susceptible de $\frac{1. 2. 3. 4. 5. 6}{2. 3 \times 2} = 60$
sextinaires à répétition.

+	2	2	2	4	4	8	+	2	4	4	8	2	2	+	4	2	8	2	4	2
	2	2	2	4	8	4		2	4	8	2	2	4		4	2	8	4	2	2
	2	2	2	8	4	4		2	4	8	2	4	2		4	4	2	2	2	8
	2	2	4	2	4	8		2	4	8	4	2	2		4	4	2	2	8	2
	2	2	4	2	8	4		2	8	2	2	4	4		4	4	2	8	2	2
	2	2	4	4	2	8		2	8	2	4	2	4		4	4	8	2	2	2
	2	2	4	4	8	2		2	8	2	4	4	2		4	8	2	2	2	4
	2	2	4	8	2	4		2	8	4	2	2	4		4	8	2	2	4	2
	2	2	4	8	4	2		2	8	4	2	4	2		4	8	2	4	2	2
	2	2	8	2	4	4		2	8	4	4	2	2		4	8	4	2	2	2
	2	2	8	4	2	4		4	2	2	2	4	8		8	2	2	2	4	4
	2	2	8	4	4	2		4	2	2	2	8	4		8	2	2	4	2	4
	2	4	2	2	4	8		4	2	2	4	2	8		8	2	2	4	4	2
	2	4	2	2	8	4		4	2	2	4	8	2		8	2	4	2	2	4
	2	4	2	4	2	8		4	2	2	8	2	4		8	2	4	2	4	2
	2	4	2	4	8	2		4	2	2	8	4	2		8	2	4	4	2	2
	2	4	2	8	2	4		4	2	4	2	2	8		8	4	2	2	2	4
	2	4	2	8	4	2		4	2	4	2	8	2		8	4	2	2	4	2
	2	4	4	2	2	8		4	2	4	8	2	2		8	4	2	4	2	2
	2	4	4	2	8	2		4	2	8	2	2	4		8	4	4	2	2	2

On voit par cette application combien peu vraisemblable est la détermination de faits historiques dont les dates et même la succession manquent.

Exemple 2^d. Trouver le coefficient de permutation d'un produit de puissances,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k}{k}$$

La somme $1 + 2 + 3 + \dots + k$ étant celle des choses à permuter, le nombre des formes possibles est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (1+2+3+\dots+k)}{1 \cdot 2 \dots 1 \times 1 \cdot 2 \dots 2 \times 1 \cdot 2 \dots 3 \times 1 \cdot 2 \dots 4 \times \dots \times 1 \cdot 2 \dots k}$$

$$= \frac{(1+1)(1+2)\dots(1+2+\dots+k)}{1 \cdot 2 \dots 2 \times 1 \cdot 2 \dots 3 \times \dots \times 1 \cdot 2 \dots k}$$

Cette formule est d'un grand usage dans l'Analyse Combinatoire.

§. 10. Nous voilà donc en état de trouver sur le champ le coefficient de permutation d'un n^{naire} donné, ce qui manquait à la solution du §. 5. Dans la plupart des cas pratiques ce coefficient s'écrit de tête.

*Exemples. *)*

$$\begin{array}{c}
 q^4 \\
 9 = + 4 \left| \begin{array}{c} q \ q \ q \ q \\ 1 \ 1 \ 1 \ 6 \\ 12 \ 1 \ 1 \ 2 \ 5 \\ 12 \ 1 \ 1 \ 3 \ 4 \\ 12 \ 1 \ 2 \ 2 \ 4 \\ 12 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \\ 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 4. \begin{array}{c} q \ q \\ 1^3 \end{array} 6 + 12. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^2 \end{array} 2. 5 \\ + 12. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^2 \end{array} 3. 4 + 12. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1 \end{array} 2^2. 4 \\ + 12. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1 \end{array} 2. 3^2 + 4. \begin{array}{c} q \ q \\ 2^3 \end{array} 3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

***)*

$$\begin{array}{l}
 q^6 \\
 13 = 6. \begin{array}{c} q \ q \\ 1^5 \end{array} 8 + 30. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^4 \end{array} 27 + 30. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^4 \end{array} 36 + 30. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^4 \end{array} 45 \\
 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^3 \end{array} 2^2 6 + 120. \begin{array}{c} q \ q \ q \ q \\ 1^3 \end{array} 235 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^3 \end{array} 24^2 \\
 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^3 \end{array} 3^2 4 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^2 \end{array} 2^3 5 + 180. \begin{array}{c} q \ q \ q \ q \\ 1^2 \end{array} 2^2 34 \\
 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1^2 \end{array} 23^3 + 60. \begin{array}{c} q \ q \ q \\ 1 \end{array} 2^3 3^2 + 6. \begin{array}{c} q \ q \\ 2^5 \end{array} 3.
 \end{array}$$

Comme le lecteur est déjà familiarisé avec la notation, je peux m'épargner les répétitions et distinctions oiseuses; ce qui abrège considérablement l'énoncé. Quiconque a de la routine écrit ces développemens de suite, aussi mécaniquement qu'une multiplication ou une division numérique.

*) Chez HINDENBOURG cette fonction combinatoire se note d^9D ; la 4^{me} lettre de l'alphabet indiquant des quaternaires, et le 9 au haut de la gauche, qu'ils sont à somme 9. La majuscule droite apprend que les files sont rangées (*complexiones rite ordinatae*) et la minuscule allemande homonyme avertit que chaque file est accompagnée de son coefficient de permutation. Il me semble impossible d'être plus court et plus expressif en caractères alphabétiques.

**) Chez HINDENB. $f^{13}F$.

Cette méthode de considérer séparément les produits et leurs coefficients numériques, pour les poser ensuite tout d'un coup, est incomparablement plus expéditive qu'en les évaluant ensemble par des procédés successifs, d'autant plus sujets à caution qu'il en a fallu d'avantage. Mais quoique cette évaluation directement combinatoire soit plus sûre par la simplicité, il serait bon néanmoins de pouvoir la vérifier par le nombre des formes de N , qui est celui de N , en sommant les coefficients de permutation. Passons à cette recherche.

§. II. Nombres r^{naires} à somme n des chiffres.

Il n'y a évidemment qu'une manière de former des 1^{naires} à somme n ; c'est le chiffre n lui-même.

2^{naires} . En mettant successivement les chiffres 1, 2, 3, jusques $n-1$ à gauche, la droite recevra les chiffres $n-1$, $n-2$, jusques 1. Total $n-1$ binaires.

3^{naires} . Le chiffre 1 étant à gauche, la somme restante $n-1$ produira à sa droite $n-2$ binaires, et partant ce nombre de ternaires avec lui.

2 à gauche, la somme $n-2$ produit avec lui $n-3$ ternaires,

3 à gauche, la somme $n-3$ produit avec lui $n-4$ ternaires,

et ainsi de suite jusqu'au chiffre $n-2$ avec lequel la somme 2 forme 1 ternaire.

En sommant de bas en haut, vient

$$1 + 2 + 3 + \dots + n-2 = \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \text{ ternaires.}$$

4^{naires} . Le chiffre 1 à gauche, la somme $n-1$ produit avec lui $\frac{n-2}{1} \cdot \frac{n-3}{2}$ quats.

Le chiffre 2 à gauche, la somme $n-2$ produit avec lui $\frac{n-3}{1} \cdot \frac{n-4}{2}$ quats.

et ainsi de suite jusques

$n-3$ avec lequel la somme 3 forme $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1}$ quaternaires.

J'en conclus de bas en haut $\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$
 $+ \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + + \frac{n-2}{1} \cdot \frac{n-3}{2} = \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3}$
 quaternaires.

On trouve de même $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + + \frac{n-2}{1} \cdot \frac{n-3}{2}$
 $\frac{n-4}{3} = \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \cdot \frac{n-4}{4}$ quintinaires.

Le procédé demeurant uniforme, on a généralement

*) „ $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \dots \frac{n-r+1}{r-1}$ rⁿaires à
 somme n des chiffres.”

J'eusse pû déduire ce théorème des paragraphes 6 et 9; mais la présente démonstration directe est en même tems une règle infallible pour construire en colonne rangée les nombres rⁿaires à somme n des chiffres.

Constatons à présent l'exactitude des coefficients proposés dans les paragraphes 4, 5 et 10.

La somme des coefficients de permutation de

$$q^3 \quad 7 \text{ est } \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 = 3 + 6 + 3 + 3$$

$$q^4 \quad 9 \text{ est } \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 = 4 + 12 + 12 + 12 + 12 + 4$$

*) Chez HINDENB. ⁿM est ce nombre, et ⁿM l'ensemble même des files à somme n des numéros. On en verra la raison plus bas.

$$13 \text{ est } \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \left(\begin{matrix} 6 + 30 + 30 + 30 + 60 + 120 + 60 \\ + 60 + 60 + 180 + 30 + 60 + 6 \end{matrix} \right)$$

Remarque. La quantité des 1^{naires}, 2^{naires}, etc. jusques et compris les n^{naires} , tous à somme n des chiffres, est

$$1 + \frac{n-1}{1} + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} + + \frac{n-1}{1} + 1 \\ = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Comme les problèmes qui vont suivre contiennent assez d'applications des deux théorèmes de ce paragraphe, je n'en donnerai pas ici. En illustrant trop les parties, on court risque d'obscurcir l'ensemble.

§. 12. Nous savons évaluer $(1 \cdot X + 2 \cdot X^2 + 3 \cdot X^3 + \text{etc.})^r$ pour chaque valeur de X . Si l'on voulait le développer de $(1 + 2 + 3 + + k)^r$, *) il suffirait de changer dans celui de $(1 \cdot X + \text{etc.})^r$ les q en points, et de supprimer les X . Quelque facile que soit ce procédé, HINDENBOURG en a donné un autre non moins beau: il exige quelques préliminaires que voici. Je pars encore du cas le plus général.

**) „On peut former n^r nombres r^{naires} avec n chiffres en les répétant.“

2^{naires}. Le chiffre 1 peut recevoir successivement 1, 2, jusques n à sa droite: donc n binaires. Mais la même chose a lieu pour 2, 3, enfin pour chaque autre des n chiffres: moyennant quoi le total des binaires possibles est $n \cdot n = n^2$.

*) $(a + b + c + + u)^r$ chez H.

**) H. note $\begin{matrix} M \\ [1 \ 2 \ 3 \ . \ . \ n] \end{matrix}$ l'ensemble des files résultantes.

3^{naires} . Chacun des n chiffres peut recevoir par ordre les n^2 binaires à droite: donc $n.n^2 = n^3$ ternaires possibles.

4^{naires} . Chacun des n chiffres peut recevoir par ordre les n^3 ternaires à droite: donc $n.n^3 = n^4$ quaternaires possibles.

Et ainsi de suite. Cette démonstration directe enseigne à disposer en colonne rangée les polynaires à répétition.

Exemple. Les Ternaires possibles avec 0136 sont au nombre de $4^3 = 64$.

	3	2	1		3	2	1		3	2	1		3	2	1
+	0	0	0	+	1	0	0	+	3	0	0	+	6	0	0
	0	0	1		1	0	1		3	0	1		6	0	1
	0	0	3		1	0	3		3	0	3		6	0	3
	0	0	6		1	0	6		3	0	6		6	0	6
	0	1	0		1	1	0		3	1	0		6	1	0
	0	1	1		1	1	1		3	1	1		6	1	1
	0	1	3		1	1	3		3	1	3		6	1	3
	0	1	6		1	1	6		3	1	6		6	1	6
	0	3	0		1	3	0		3	3	0		6	3	0
	0	3	1		1	3	1		3	3	1		6	3	1
	0	3	3		1	3	3		3	3	3		6	3	3
	0	3	6		1	3	6		3	3	6		6	3	6
	0	6	0		1	6	0		3	6	0		6	6	0
	0	6	1		1	6	1		3	6	1		6	6	1
	0	6	3		1	6	3		3	6	3		6	6	3
	0	6	6		1	6	6		3	6	6		6	6	6

Le développement de

$$(\overset{3}{0} + \overset{3}{1} + \overset{3}{3} + \overset{3}{6}) (\overset{2}{0} + \overset{2}{1} + \overset{2}{3} + \overset{2}{6}) (\overset{1}{0} + \overset{1}{1} + \overset{1}{3} + \overset{1}{6})$$

donne cette colonne, qui n'exige que la peine de tracer les chiffres. Un produit de tant de n -nômes qu'on veut se consruit de même.

En formant la colonne stélégraphiquement, on peut, pour ainsi dire, opérer les yeux bandés. Soit, par exemple, $X = 1$, on aura

$X_n =$ à un produit de r polynomes de n termes.
Pour en construire le développement:

„Ecrivez les termes 1, 2, 3 . . . n de haut en bas n^{r-1} fois de suite. Ecrivez à gauche de ce rang vertical n^{r-2} fois les mêmes termes en répétant chacun n fois; ensuite n^{r-3} fois en répétant chaque terme n^2 ; continuez dans cette progression.“

Si la colonne devient trop longue, rien n'empêche de la rompre en sections.

Théorème secondaire. *) „En répétant, n chiffres produisent

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \cdot \cdot \frac{n+r-1}{r}$$

nombres r^{naires} rangés.“

Démonstration, servant de règle pour la construction.

2^{naires} . Le chiffre 1 admettant 1, 2, , n à droite, donne n binaires.

Le chiffre 2 admettant 2, 3, , n à droite, donne $n-1$ binaires.

Le chiffre 3 admettant 3, 4, , n à droite, donne $n-2$ binaires.

.

Le chiffre n admettant $n - - 1$ binaire.

Total $1+2+3++n = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2}$ binaires.

3^{naires} . Le chiffre 1 admet. à droite les $\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2}$ binaires.

2 — — $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{2}$ binaires, sans 1.

*) ^M [1, 2 . . . n] chez HINDENBOURG.

le chiffre 3 admet à droite les $\frac{n-2}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$
binaires, sans 1, 2

.

$$n \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2}$$

--- 1, 2, , n-1

$$\text{Total} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} + + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} =$$

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$$

4^{naires}. le chiffre 1 admet à droite les $\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$
ternaires.

$$2 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n+1}{3}$$

--- ternaires, sans 1

.

$$n \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3}$$

--- ternaires, sans 1, 2, , n-1

$$\text{Total} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} + + \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$$

$$= \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot \frac{n+4}{4}$$

Et ainsi de suite; le procédé est uniforme.

Exemple. Développer $(\dot{0} + \dot{1} + \dot{3} + \dot{6})^4$. Il n'y a
qu'à écrire les $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ quaternaires avec re-
pétition des chiffres 0, 1, 3, 6, et les accompagner du co-
efficient de permutation.

+	0000	1	+	0116	12	+	1133	6
	0001	4		0133	12		1136	12
	0003	4		0136	24		1166	6
	0006	4		0166	12		1333	4
	0011	6		0333	4		1336	2
	0013	12		0336	12		1366	12
	0016	12		0366	12		1666	4
	0033	6		0666	4		3333	1
	0036	12		1111	1		3336	4
	0066	6		1113	4		3366	6
	0111	4		1116	4		3666	4
	0113	12					6666	1

La somme des coefficients numériques étant $256 = 4^4$, ils sont sans faute.

Il n'est pas indigne d'attention que beaucoup des nombres formés des chiffres triangulaires 0136 sont remarquables en mathématique, en physique et en histoire, tant politique que religieuse.

§. 13. Jusques ici nous n'avons exécuté les règles combinatoires qu'arithmographiquement; c'est à dire, à l'aide d'indices numériques ou plutôt de numéros attribués aux choses combinés. Avec de la réflexion on s'apperçoit pourtant que cet expédient, particulier à la notation que j'ai adoptée, n'est nullement indispensable, et qu'on peut combiner et permuter, avec et sans répétition, en files rangées et non rangées, uniquement par l'échange et le déplacement des lettres, comme on fait en construisant les dictionnaires. Par ce procédé lexicographique, l'Analyse Combinatoire s'élève, comme je l'ai dit dans l'introduction, au rang de science indépendante, dont l'analyse mathématique et toutes les autres sciences de raisonnement ne sont que des parties. La méthode lexicographique ou directement combinatoire (*rein combinatorisches Verfahren*) est entièrement due à HINDENBOURG.

Exemples en lettres. *)

Permutation de 4 choses diverses	Permut. à 3 de 4 choses diverses	Combin. à 5 de 7 choses diverses	Permut. de 3 choses avec répétition	Permut. à 2 de 5 choses avec répét.	Combin. à 4 de 3 choses avec répét.
abcd	efg	rstuv	ccc	aa	kkkk
abdc	efh	rstuw	ccd	ab	kkkl
acbd	egf	rstux	cce	ac	kkkm
acdb	egh	rstvw	cdc	ad	kkll
adbdc	ehf	rstvx	cd d	ae	kklm
adcb	ehg	rstwx	cde	ba	kkmm
bacd	feg	rsuvw	cec	bb	kl ll
badc	feh	rsuvx	ced	bc	kl lm
bcad	fge	rsuw x	cee	bd	kl mm
bcda	fgh	rsvw x	dcc	be	kmm m
bdac	fhe	rtuvw	dcd	ca	ll ll
bdca	fhg	rtuv x	dce	cb	ll lm
cabd	gef	rtuw x	ddc	cc	ll mm
cadb	geh	rtvw x	ddd	cd	lmm m
cbad	gfe	ruvw x	dde	ce	mmmm
cbda	gfh	stuvw	dec	da	
cdab	ghe	stuv x	ded	db	
cdba	ghf	stuw x	dee	dc	
dabc	hef	stvw x	ecc	dd	
dacb	heg	suvw x	ecd	de	
dbac	hfe	tuvw x	ece	ea	
dbca	hfg		edc	eb	
dcab	hge		edd	ec	
dcba	hgf		ede	ed	
			eee	ee	
			eed		
			eee		

*) Perm. (abcd) ou D' [abcd], C' [efgh], E' [rstuvw], ou E' [r..w],
 C [cde], B [a..e], D [klm]

A quiconque veut faire des progrès rapides en Analyse Combinatoire, je conseillerai de copier d'abord une fois ces exemples, puis de les essayer en d'autres lettres. On en acquiert plus de routine que par cent lectures; car ce n'est qu'en faisant qu'on apprend à faire, et que l'esprit occupé plus fortement, approfondit les idées présentées et en crée de nouvelles.

Pour montrer comment on peut soumettre à ce procédé la combinaison à somme donnée, cherchons le coefficient de x^{13} dans le développement de

$$(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + hx^8 + ix^9)^5.$$

C'est $5 a^4 i$ *)

$$+ 20 a^3 b h$$

$$+ 20 a^3 c g$$

$$+ 20 a^3 d f$$

$$+ 10 a^3 e^2$$

$$+ 30 a^2 b^2 g$$

$$+ 60 a^2 b c f$$

$$+ 60 a^2 b d e$$

$$+ 30 a^2 c^2 e$$

$$+ 30 a^2 c d^2$$

$$+ 20 a b^3 f$$

$$+ 60 b^2 c e$$

$$+ 30 a b^2 d^2$$

$$+ 60 a b c^2 d$$

$$+ 5 a c^4$$

$$+ 5 b^4 e$$

$$+ 20 b^3 c d$$

$$+ 10 b^2 c^3$$

La somme des coefficients numériques étant

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495, \text{ le coefficient cherché est sans}$$

faute. Je l'ai construit tout réduit; d'abord la partie

*) $(ax + \dots + ix^9)^5 x^{13}$ ou j^{13} chez HINDENB.

littérale, puis les coefficients numériques. Afin de faire voir comment cela est possible, considérons la colonne 5^{naire}

11119	<i>a a a a i</i> *)
11128	<i>a a a b h</i>
11137	<i>a a a c g</i>
11146	<i>a a a d f</i>
11155	<i>a a a e e</i>
11227	<i>a a b b g</i>
11236	<i>a a b c f</i>
11245	<i>a a b d e</i>
11335	<i>a a c c e</i>
11344	<i>a a c d d</i>
12226	<i>a b b b f</i>
12235	<i>a b b c e</i>
12244	<i>a b b d d</i>
12334	<i>a b c c d</i>
13333	<i>a c c c c</i>
22225	<i>b b b b e</i>
22234	<i>b b b c d</i>
22333	<i>b b c c c</i>

1) Puisque le terme, dont on demande le coefficient, a x^{13} pour puissance, son premier produit sera $(ax)^4 i x^9$, et partant le 5^{naire} lexicographique initial est *a a a a i*. Pour en dériver les suivans sans autre peine que de les écrire, j'abaisse alphabétiquement *i* et élève l'*a* voisin; vient *a a a b h*.

La répétition de ce procédé me donne *a a a c g*, *a a a d f*, *a a a e e*.

2) Ne pouvant aller plus loin, je prens le premier 5^{naire}, où *b* est à la seconde place de droite à gauche; c'est *a a a b h*. Abaisant *h* et élevant l'*a* le plus proche,

*) ^{13}J ; se lisant *Involution lexicographique à somme 13*. On en verra l'explication plus bas.

j'ai $aabbg$. Opérant sur bg comme dans 1), j'obtiens $abcf$, $abde$.

Comme c suit b dans l'alphabet, je prens à présent le premier 5^{naire}, où c a la seconde place et b la troisième, $abcf$. Opérant sur celui-ci, ainsi que nous venons de faire, il en résulte $acce$, $acdd$.

3) Les trois dernières places n'étant plus susceptibles d'élévation lexicographique, je prens $aabbg$, premier 5^{naire} où b est à la troisième. Abaisant ici g et élevant a , j'ai $abbbf$; d'où, par les règles 1) et 2), $abbce$, $abdd$, $abccce$, $abccdd$.

4) Maintenant, du premier 5^{naire} $abbbf$, où b a la quatrième place, je déduis par les règles énoncées, $bbbbe$, $bbbcd$, $bbccc$.

A moins d'intervertir l'ordre alphabétique, il n'y a plus de variation possible. La dernière forme du §. 9. me donne à présent sans tracer un chiffre ailleurs, les coefficients numériques de permutation: leur somme prouve à la fois leur justesse et celle de toute la colonne.

Qu'on écrive les 5^{nares} au long ou simplifiés en puissances, la marche est la même.

Si l'explication de la méthode est prolix, son apprentissage ne l'est aucunement. On se familiarise en une heure avec elle, en opérant d'abord par chiffres leibnitziens, puis par polynaires non réduits, et enfin dans la simplification potentielle.

Disons à l'honneur du procédé lexicographique de HINDENBOURG, qu'aucun autre n'atteint son élégante rapidité. On s'en convaincra le mieux en traitant le problème suivant par les meilleures méthodes connus.

Ecrire tout d'un coup le coefficient de x^{25} dans le développement de $(a + bx + cx^3 + dx^6 + ex^{10})^{10}$, *)

*) $(a + ex^{10})^{10} x^{25}$ chez HINDENB.

$\frac{6.7.8.9.10}{2.2}$	$e^2 c b^2 a^5$
$\frac{6.7.8.9.10^3}{2.2.3}$	$e^2 b^5 a^3$
$\frac{7.8.9.10}{2}$	$e d^2 c a^6$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$e d^2 b^3 a^4$
$\frac{6.7.8.9.10^3}{2.3}$	$e d c^3 a^5$
$\frac{4.5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$e d c^2 b^3 a^3$
$\frac{7.8.9.10}{1}$	$e d c b^6 a$
$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}$	$e c^5 a^4$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$e c^4 b^3 a^2$
$\frac{7.8.9.10}{2.3}$	$e c^3 b^6$
$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}$	$d^4 b a^5$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$d^3 c^2 b a^4$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$d^3 c b^4 a^2$
$\frac{8.9.10}{2.3}$	$d^3 b^7$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$d^2 c^4 b a^3$
$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}$	$d^2 c^3 b^4 a$
$\frac{7.8.9.10}{2}$	$d c^6 b a^2$
$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}$	$d c^5 b^4$
$\frac{9.10}{1}$	$c^8 b a$

J'ai rangé à rebours, pour montrer que cette manière n'est pas moins facile, Ici elle l'était même davantage, parce que dans la construction littérale j'ai d'abord pu négliger a pour l'ajouter à la fin comme

complément des dix facteurs. Voici comme je m'y suis pris pour les autres lettres,

Ayant trouvé que le plus haut polynaire sans a est $e^2 c b^2$, que e accompagne la même puissance de x que $d c b$, d la même que c^2 et b^6 , et c la même que b^3 ; je remplace c par b^3 , vient $e^2 b^5$.

Comme b ne peut se remplacer, je substitue $d^2 c$ à $e b^5$; ce qui me donne $e d^2 c$, où, mettant b^3 pour c , je parviens à $e d^2 b^3$.

Je change ici d en c^2 et b^3 en c pour avoir $e d c^3$, où, mettant deux fois de suite b^3 pour c , j'ai $e d c^2 b^3$ et $e d c b^6$.

Les produits ne peuvent avoir plus de dix facteurs: on ne peut donc plus remplacer c , et en conséquence je change d en c^2 et b^6 en c^2 ; vient $e c^5$.

Et ainsi de suite. J'en ai assez dit pour qui m'a suivi la plume à la main. On peut facilement généraliser toutes ces règles lexicographiques: je ne m'y arrête pas, parce qu'il est tems de reprendre le Polynome Combinatoire.

$$\begin{aligned} F(a + x f x) &= F a + A \frac{x}{1} + B \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} \\ &= F a + A' \frac{x f x}{1} + B' \frac{x^2 f x^2}{1.2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

§. 14. Nos coefficients leibnitzziens, tout aussi généraux que les lettres, étant plus souples, et les simplifications différentielles du §. 1. nous devenant inutiles, après les principes que nous venons d'établir, prenons

$$\begin{aligned} {}^{\text{Fq}}_0 X, \text{ équivalant par §. 2. à } F({}_0^{\text{q}} X) &= \\ F({}_0^{\text{q}} + {}_0^{\text{q}} X) &= F({}_0^{\text{q}} + 1. {}_0^{\text{q}} X + 2. {}_0^{\text{q}} X^2 + 3. {}_0^{\text{q}} X^3 + \text{etc.}). \\ {}^{\text{Fq}}_0 X, \text{ développé combinatoirement en puissances} \end{aligned}$$

de X et X^q , donne, en distinguant par des traits les coefficients des dernières

$$\begin{aligned} & \frac{Fq}{0} + \frac{Fq}{1} \cdot X + \frac{Fq}{2} \cdot X^2 + \dots + \frac{Fq}{N} \cdot X^N + \text{etc.} *) \\ &= \frac{Fq}{0'} + \frac{Fq}{1'} \cdot X + \frac{q}{2'} \cdot X^2 + \dots + \frac{Fq}{N} \cdot X^N + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or par §. 2., $X^q = \frac{q}{1} \cdot X + \frac{q}{2} \cdot X^2 + \frac{q}{3} \cdot X^3 + \dots + \frac{q}{N} \cdot X^N + \text{etc.}$

$$X^{q^2} = \frac{q^2}{2} \cdot X^2 + \frac{q^2}{3} \cdot X^3 + \dots + \frac{q^2}{N} \cdot X^N + \text{etc.}$$

$$X^{q^3} = \frac{q^3}{3} \cdot X^3 + \frac{q^3}{4} \cdot X^4 + \dots + \frac{q^3}{N} \cdot X^N + \text{etc.}$$

et ainsi de suite.

Ces valeurs substituées, la double expression de

$\frac{Fq}{0} X$ devient

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \frac{Fq}{0} + \frac{Fq}{1} \cdot X + \frac{Fq}{2} \cdot X^2 + \dots + \frac{Fq}{N} \cdot X^N + \text{etc.} \\ & \quad \quad \quad \frac{Fq}{2'} \cdot \frac{q}{2} \quad \quad \frac{Fq}{2'} \cdot \frac{q^2}{3} \quad \quad \frac{Fq}{2'} \cdot \frac{q^2}{N} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \frac{q}{3'} \cdot \frac{q^3}{3} \quad \quad \frac{Fq}{3'} \cdot \frac{q^3}{N} \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \frac{Fq}{N'} \cdot \frac{q^N}{N} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

L'identité des deux séries donne ce théorème remarquable, proprement dit le

POLYNOME COMBINATOIRE

$$*) \frac{Fq}{0} N = \frac{Fq}{1'} \cdot N + \frac{q}{2'} \cdot N + \frac{q^2}{3'} \cdot N + \dots + \frac{Fq}{N'} \cdot N;$$

N étant un nombre entier, nous savons par ce qui pré-

*) $\frac{Fq}{0} N$ est chez HINDENB. $F(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \cdot (n + 1)$ parceque chez lui Fa est censé être le premier coefficient du développement.

cède, évaluer ${}^qN$ de la manière la plus directe et la plus simple, et par conséquent le problème proposé dans l'introduction est complètement résolu.

Si j'ai été un peu long, c'est que j'ai supposé un lecteur qui n'eût pas même les premières notions de l'Analyse Combinatoire. En les exposant, j'ai mis à portée d'apprécier l'extrême facilité de la méthode et de la comparer avec la différentielle, qui était seule en possession des développemens avant HINDENBOURG. Outre qu'elle conduit plus rapidement et plus sûrement à la solution, elle a encore l'avantage précieux pour le commençant d'être immédiatement applicable à des questions importantes. Ces prérogatives de l'Analyse Combinatoire n'ôtent rien au mérite de la Différentielle, qui a opéré tant de prodiges depuis un siècle: ce n'est même qu'en réunissant intimement, qu'en amalgamant, pour ainsi dire, les deux analyses, qu'on donnera à la logique du mathématicien toute l'étendue et la simplicité, dont elle est susceptible. Mais j'oublie que je dois faire voir l'utilité de notre solution.

§. 15. *Application première.* ${}_0^qX = (a + {}^qX)^r$, en prenant ${}_0^q = a$. Nous avons ici

$$\begin{aligned} Fq \\ {}_0^qN &= \frac{d^N \cdot a^r}{1.2..N da^N} = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \dots \frac{r-N+1}{N} a^{r-N} \\ &= {}_rN \cdot a^{r-N} \text{ par la notation du §. 8. Donc} \end{aligned}$$

$$*) {}_0^qN = {}_r1 \cdot a^{r-1} \cdot {}^qN + {}_r2 \cdot a^{r-2} \cdot {}^{q^2}N + {}_r3 \cdot a^{r-3} \cdot {}^{q^3}N + \dots + {}_rN \cdot a^{r-N} \cdot {}^{q^N}N.$$

*) Chez HINDENBOURG $p^r n (n+1) = {}^rA a^{r-1} \cdot a^n A + {}^rB a^{r-2} \cdot b^n B + \dots + {}^rN a^{r-n} \cdot n^n N$.

Pour ${}_0^{q-r}X$, on a, en changeant le signe de r ,

$$\begin{aligned} *) \quad {}_0^{q-r}N &= 1 \cdot a^{-r-1} \cdot N + 2 \cdot a^{-r-2} \cdot N + \dots + N \cdot a^{-r-N} \cdot N \\ &= -1 \cdot a^{-r-1} \cdot N + 2 \cdot a^{-r-2} \cdot N - \dots + N \cdot N. \end{aligned}$$

Exemple 1^{er}. On demande le coefficient de X^8 dans

$$(1 + {}^q_1 X + {}^q_2 X^2 + \text{etc.})^{-\frac{2}{3}},$$

En prenant $a = 1$, $r = -\frac{2}{3}$ et $N = 8$, c'est ${}^{**)}_0^{q-\frac{2}{3}}8 =$

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{5}{9} \begin{array}{c|c} q & q \\ \hline 17 & 2 \\ 26 & 2 \\ 35 & 2 \\ 44 & 1 \end{array} - \frac{40}{81} \begin{array}{c|c} q & q & q \\ \hline 116 & 3 \\ 125 & 6 \\ 134 & 6 \\ 224 & 3 \\ 223 & 3 \end{array} + \frac{110}{243} \begin{array}{c|c} q & q & q & q \\ \hline 1115 & 4 \\ 1124 & 12 \\ 1133 & 6 \\ 1223 & 12 \\ 2222 & 1 \end{array} - \frac{308}{729} \begin{array}{c|c} q & q & q & q & q \\ \hline 11114 & 5 \\ 11123 & 20 \\ 11222 & 10 \end{array} \\ & + \frac{2618}{6561} \begin{array}{c|c} q & q & q & q & q & q \\ \hline 111113 & 6 \\ 111122 & 15 \end{array} - \frac{7480}{19683} \cdot 1^7 \cdot 2 \cdot 7 + \frac{21505}{59049} \cdot 1^8. \end{aligned}$$

Les coefficients de permutation sont à droite des produits respectifs. En sommant ceux-là on a

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7,$$

comme l'exige la remarque du §. II. Ces coefficients et les produits qu'ils accompagnent sont donc vérifiés. Simplicité, célérité, exactitude — la méthode de HINDENBOURG ne laisse rien à désirer.

La construction indique assez que le coefficient binomial à gauche multiplie toute la colonne: ainsi p.e.

$$\begin{aligned} *) \quad p-r \times (n+1) &= -r A a^{-r-1} \cdot a^n A + r+2 B a^{-r-2} \cdot a^n B \\ &= \pm_{r+n-1} A a^{-r-n} \cdot n^n N. \end{aligned}$$

$$**) \quad p - \frac{2}{3} \times 0, \text{ chez HINDENB.}$$

$$\begin{array}{c|c|c} 308 & \text{IIII} & 4 \\ \hline 720 & \text{IIII} & 23 \\ \hline & \text{II} & 222 \end{array} \left| \begin{array}{c} 5 \\ 20 \\ 10 \end{array} \right. = \frac{308}{720} (5 \cdot 1^4 4 + 20 \cdot 2^3 23 + 10 \cdot 1^2 2^3).$$

Exemple 2^d. Développer $({}_0X)^{-1}$. Sans diminuer la généralité de la question nous pouvons supposer ${}_0 = 1$, 1 et tous les coefficients suivans négatifs; moyennant quoi

$$\begin{aligned} ({}_0X)^{-1} &= {}_0X^{-1} = 1 + {}_01 \cdot X + {}_02 \cdot X^2 + \dots + {}_0N \cdot X^N + \text{etc.} \\ &= \frac{1}{1 - X} = \frac{1}{1 - 1 \cdot X - 2 \cdot X^2 - \dots - N \cdot X^N - \text{etc.}} \end{aligned}$$

On en tire en développant et comparant

$${}_0N = N + {}_01 \cdot N - 1 + {}_02 \cdot N - 2 + \dots + {}_0N \cdot 1,$$

série récurrente moins étendue que celle que nous avons résolue dans le Développement général §. 3. : aussi son expression immédiate est plus simplement

par ${}_0N' = 1$,

$$*) \quad {}_0N = N + N + N + \dots + N.$$

Le coefficient de X^9 est de la sorte

$$**) \quad {}_09 = 9 + 9 + 9 + \dots + 9 =$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 9 & + & \begin{array}{c|c|c} 18 & 2 & + \\ \hline 27 & 2 & \\ \hline 36 & 2 & \\ \hline 45 & 2 & \end{array} & + & \begin{array}{c|c|c|c} 1^2 & 7 & 3 & + \\ \hline 1 & 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 4^2 & 3 & \\ \hline 2^2 & 5 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & 6 & \\ \hline 3^3 & & 1 & \end{array} & + & \begin{array}{c|c|c|c} 1^3 & 6 & 4 & + \\ \hline 1^2 & 2 & 5 & 12 \\ \hline 1^2 & 3 & 4 & 12 \\ \hline 1 & 2^2 & 4 & 12 \\ \hline 1 & 2 & 3^2 & 12 \\ \hline 2^3 & 3 & 4 & \end{array} & + & \begin{array}{c|c|c|c} 1^4 & 5 & 5 & \\ \hline 1^3 & 2 & 4 & 20 \\ \hline 1^3 & 3^2 & 10 & \\ \hline 1^2 & 2^2 & 3 & 30 \\ \hline 1 & 2^4 & 5 & \end{array} \end{array}$$

*) $p^{-1} \times (n+1)$ pour $p (1 + ax + bx^2 + \text{etc.})$. Cette explication de p , posée à sa droite, s'appelle chez HIND. Scale ou échelle (Scala).

**) $p^{-1} \times 10$.

$$+ \left| \begin{array}{c} 1^5 4 \\ 1^4 2 3 3 \\ 1^3 2^3 \end{array} \right| \begin{array}{c} 6 \\ 30 \\ 20 \end{array} + \left| \begin{array}{c} 1^6 3 \\ 1^5 2^2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 7 \\ 21 \end{array} + 1^7 \cdot 8 + 1^9.$$

J'ai englobé ici les facteurs égaux en puissances, et comme les chiffres leibnitziens enfermés en parenthèses sont assez distingués par là des coefficients numériques de permutation, j'ai pu sousentendre la marque q .

La somme des coefficients numériques

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 2^8$$

prouve encore la justesse.

Pour exprimer N^{q-1} tout réduit, il faut avoir recours à l'

*) INVOLUTION LEXICOGRAPHIQUE

HINDENBOURG donne ce nom expressif à l'ensemble des polynaires possibles à somme N , disposés, quand ils sont en lettres, comme les mots d'un dictionnaire. En chiffres leibnitziens, il en résulte de deux manières une suite de nombres ascendants: 1° en sousentendant une virgule décimale après le premier chiffre de la gauche; 2° en rendant la colonne rectangulaire au moyen de zeros fictifs ajoutés à droite.

*) L'involution arithmographique d'une somme n se note chez HINDENB. ${}^nJ$, et la lexicographique ${}^nJ^r$. Quand l'involution a ses coefficients de permutation, on la désigne par $j^{}{}^nJ$ et $j^{}{}^nJ^r$.

N . . . 9 8 7 6 5 4 3 2 1									
I, . . .	I	I	I	I	I	I	I	I	I
I, . . .	I	I	I	I	I	I	I	2	2
I, . . .	I	I	I	I	I	I	3		3
I, . . .	I	I	I	I	I	2	2		4
I, . . .	I	I	I	I	4				4
I, . . .	I	I	I	2	3				5
I, . . .	I	I	I	5					5
I, . . .	I	I	2	2	2				6
I, . . .	I	I	2	4					6
I, . . .	I	I	3	3					7
I, . . .	I	I	6						7
I, . . .	I	2	2	3					8
I, . . .	I	2	5						8
I, . . .	I	3	4						9
I, . . .	I	7							9
I, . . .	2	2	2	2					9
I, . . .	2	2	4						9
I, . . .	2	3	3						9
I, . . .	2	6							9
I, . . .	3	5							9
I, . . .	4	4							9
I, . . .	8								9
I, . . .	2	2	2	3					9
I, . . .	2	2	5						9
I, . . .	2	3	4						9
I, . . .	2	7							9
I, . . .	3	3	3						9
I, . . .	3	6							9
I, . . .	4	5							9
I, . . .	9								9
.									9
.									9
.									9
N									N

$$I = I^N$$

$$+ I^{N-2} (2)$$

$$+ I^{N-3} (3)$$

$$+ I^{N-4} (2^2)$$

$$+ I^{N-5} (2 \cdot 3)$$

$$+ I^{N-6} (5)$$

$$+ I^{N-7} (2^3)$$

$$+ I^{N-8} (2 \cdot 4)$$

$$+ I^{N-9} (3^2)$$

$$+ I^{N-10} (6)$$

$$+ I^{N-11} (2^2 \cdot 3)$$

$$+ I^{N-12} (2 \cdot 5)$$

$$+ I^{N-13} (3 \cdot 4)$$

$$+ I^{N-14} (7)$$

$$+ I^{N-15} (2^4)$$

$$+ I^{N-16} (2^2 \cdot 4)$$

$$+ I^{N-17} (2 \cdot 3^2)$$

$$+ I^{N-18} (2 \cdot 6)$$

$$+ I^{N-19} (3 \cdot 5)$$

$$+ I^{N-20} (4^2)$$

$$+ I^{N-21} (8)$$

$$+ I^{N-22} (2^3 \cdot 3)$$

$$+ I^{N-23} (2^2 \cdot 5)$$

$$+ I^{N-24} (2 \cdot 3 \cdot 4)$$

$$+ I^{N-25} (2 \cdot 7)$$

$$+ I^{N-26} (3^3)$$

$$+ I^{N-27} (3 \cdot 6)$$

$$+ I^{N-28} (4 \cdot 5)$$

$$+ I^{N-29} (9)$$

$$+ N$$

$$N - 1$$

$$N - 2$$

$$N - 12, N - 3$$

$$N - 3$$

$$N - 3, N - 4$$

$$N - 4$$

$$N - 3, N - 4, N - 5$$

$$2 \cdot 3$$

$$N - 4, N - 5$$

$$N - 4, N - 5$$

$$2$$

$$N - 5$$

$$N - 4, N - 5, N - 6$$

$$2$$

$$N - 5, N - 6$$

$$N - 5, N - 6$$

$$N - 6$$

$$N - 4, \dots, N - 7$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$N - 5, \dots, N - 7$$

$$2$$

$$N - 5, \dots, N - 7$$

$$2$$

$$N - 6, N - 7$$

$$N - 6, N - 7$$

$$N - 6, N - 7$$

$$2$$

$$N - 7$$

$$N - 5, \dots, N - 8$$

$$2 \cdot 3$$

$$N - 6, N - 7, N - 8$$

$$2$$

$$N - 6, N - 7, N - 8$$

$$N - 7, N - 8$$

$$N - 6, N - 7, N - 8$$

$$2 \cdot 3$$

$$N - 7, N - 8$$

$$N - 7, N - 8$$

$$N - 8$$

$$= \frac{q-1}{0} N.$$

Les chiffres en parenthèse sont des coefficients leibnitziens aussi bien que les 1 sans marque: les coefficients numériques occupent la droite.

Cette expression de ${}_0^{q-1}N$ se termine avec 1^0 : A qui a beaucoup d'usage le tableau involutoire n'est pas nécessaire pour la construire. On écrit les co-facteurs de ${}_1^{q-2}N$, ${}_1^{q-3}N$, ${}_1^{q-4}N$, etc., d'après la condition que la somme des chiffres leibnitziens soit respectivement 2, 3, 4, etc.: on joint ensuite les coefficients de permutation par la règle du §. 9: et on vérifie enfin l'opération par leur somme qui doit être 2^{N-1} selon le §. 11.

De ce que je viens de dire on voudra bien ne pas inférer que je regarde le tableau involutoire comme superflu: il est utile même aux combinateurs les plus exercés, et son étude fournit des vues pour l'Arithmétique figurée, qu'on a trop peu traitée jusqu'à ce jour. Une propriété précieuse du tableau, la quelle saute d'abord aux yeux, c'est de

„Dériver d'une involution donnée l'immédiatement voisine.

Par exemple, pour dériver l'involution de 10 de l'involution de 9, exprimée sur le tableau, préposez à cette dernière 1 et ajoutez au bas,

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>6</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	2	2	2	2	2	2	2	2	4		2	2	3	3		2	2	6			2	3	5			2	4	4			2	8				3	3	4			3	7				4	6				5	5				10					<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>3</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td><td></td></tr> </table>	3	3	4	3	7		4	6		5	5		10			Mais cet appendice est une involution de 10, où le moindre chiffre est 2; involution qu'on peut deduire de l'involution 8 du tableau en préposant 2 et ajoutant autre involution de 10, où le moindre chiffre est 3. On trouve ainsi que chaque involution se décompose en d'autres jusqu'à exhaustion. Nous en obtenons une recurrence remarquable à laquelle on me permettra de ne pas m'arrêter,
2	2	2	2	2																																																																									
2	2	2	4																																																																										
2	2	3	3																																																																										
2	2	6																																																																											
2	3	5																																																																											
2	4	4																																																																											
2	8																																																																												
3	3	4																																																																											
3	7																																																																												
4	6																																																																												
5	5																																																																												
10																																																																													
3	3	4																																																																											
3	7																																																																												
4	6																																																																												
5	5																																																																												
10																																																																													

pour traiter tout de suite l'involution littérale sans considération numérique.

INVOLUTION LITÉRALE DIRECTE

Le coefficient général du développement de $(1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.})^{-n}$ est, en supprimant les coefficients numériques, faciles à trouver par §. 9,

$$\begin{aligned}
 *) \quad & a^n + a^{n-2}b + a^{n-3}c \\
 & + a^{n-4}(b^2 + d) \\
 & + a^{n-5}(bc + e) \\
 & + a^{n-6}(b^3 + bd + c^2 + f) \\
 & + a^{n-7}(b^2c + be + cd + g) \\
 & + a^{n-8}(b^4 + b^2d + bc^2 + bf + ce + d^2 + h) \\
 & + a^{n-9}(b^3c + b^2e + bcd + bg + c^3 + cf + de + i) \\
 & + a^{n-10}(b^5 + b^3d + b^2c^2 + b^2f + bce + bd^2 + bh \\
 & \qquad \qquad \qquad + c^2d + cg + df + e^2 + k)
 \end{aligned}$$

et ainsi de suite. La série se termine à a^{n-n} .

Abrégeons cette expression par cette forme qui s'explique elle même:

$$\begin{aligned}
 & a^n + a^{n-2}[2] + a^{n-3}[3] + a^{n-4}[4] + \dots \\
 & + a^{n-r+2}[r-2] + a^{n-r+1}[r-1] + a^{n-r}[r] + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

On a ici

$[r] = b[r-1] + c[r-2] + d[r-3] + \dots + \bar{r}$; $\bar{r}$ désignant la plus haute lettre de $[r]$, laquelle s'ajoute finalement.

Pour le cas présent, où les produits doivent être rangés, aucune lettre ne multiplie une plus basse. Ainsi

$$\begin{aligned}
 [10] = & b(b^4 + b^2d + bc^2 + bf + ce + d^2 + h) + c(cd + g) \\
 & + d.f + e.e + k.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *) \quad n \text{ J}^r = & a^n + a^{n-2} \text{ (2 J}^r + a^{n-3} \text{ (3 J}^r + a^{n-4} \text{ (4 J}^r \\
 & \text{(a b c...))} \qquad \text{(b c d...))} \qquad \qquad \qquad + \text{etc. chez HIND.}
 \end{aligned}$$

Je répète encore ici et très expressément l'avertissement du Développement général, de ne pas confondre avec une récurrence ordinaire cette construction immédiate d'un terme général au moyen de ses parties.

Aucune méthode n'atteint cette superbe solution de HINDENBURG, de laquelle on peut dire dans toute la rigueur de l'expression, qu'elle ne demande que la peine et le tems d'écrire. Par elle l'Analyse Combinatoire a reçu le dernier coup de main; car

chaque coefficient général du développement d'une fonction de série peut se construire involutoirement, moyennant des modifications aux coefficients de permutation.

On en verra des exemples.

En multipliant aussi les lettres alphabétiquement plus basses, on obtient une INVOLUTION PERMUTÉE

(Voyez le Tableau Combinatoire suivant, p. 98.)

Cette involution permutée est le coefficient de x^n dans le développement de

$$\begin{aligned} & a'x + b'x^2 + c'x^3 + d'x^4 + \text{etc.} \\ & + (a'x + \text{etc.}) (a''x + b''x^2 + \text{etc.}) \\ & + (a'x + \text{etc.}) (a''x + \text{etc.}) (a'''x + b'''x^2 + \text{etc.}) \\ & + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

On y rapporte une foule de cas.

Non seulement la somme de différentes classes de polynaires, mais encore chaque classe en particulier se traite avantageusement par involution. La matière est si riche que je dois me borner: mais quiconque approfondira les exemples que je donne, ne peut manquer de sentir, que le Tableau involutoire est un des algorithmes les plus féconds, et l'instrument analytique le plus ingénieux qu'on connaisse. Nous le devons à

(La Continuation du Texte, p. 99.)

H I N -
G

n	6	5	4	3	2	1	
I	I	I	I	I	I	I	$= a^{(n)} \dots a^{VI} a^V a^{IV} a^{III} a^{II} a^I$
I	I	I	I	I	2		$+ a^{(n)} \dots a^{VI} a^V a^{IV} a^{III} b^{II}$
I	I	I	I	2	I		$+ a^{(n)} \dots a^{VI} a^V a^{IV} \left[\begin{array}{l} b^{III} a^{II} \\ c^{III} \end{array} \right]$
I	I	I	I	3			$+ a^{(n)} \dots a^{VI} a^V \left[\begin{array}{l} b^{IV} a^{III} a^{II} \\ b^{IV} b^{III} \\ c^{IV} a^{III} \\ d^{IV} \end{array} \right]$
I	I	I	2	I	I		$+ a^{(n)} \dots a^{VI} \left[\begin{array}{l} b^V a^{IV} a^{III} a^{II} \\ b^V a^{IV} b^{III} \\ b^V b^{IV} a^{III} \\ b^V c^{IV} \\ c^V a^{IV} \\ c^V b^{IV} \\ d^V a^{IV} \\ e^V \end{array} \right]$
I	I	I	2	2			
I	I	I	3	I			
I	I	I	4				
I	I	2	I	I	I		
I	I	2	I	2			
I	I	2	2	I			
I	I	2	3				
I	I	3	I	I			
I	I	3	2				
I	I	4	I				
I	I	5					
I	2	I	I	I	I		$+ a^{(n)} \dots a^V \left[\begin{array}{l} b^{VI} a^V a^{IV} a^{III} a^{II} \\ b^{VI} a^V a^{IV} b^{III} \\ b^{VI} a^V b^{IV} a^{III} \\ b^{VI} a^V c^{IV} \\ b^{VI} b^V b^{IV} \\ b^{VI} c^V a^{IV} \\ b^{VI} d^V \\ c^{VI} a^V a^{IV} a^{III} \\ c^{VI} a^V b^{IV} \\ c^{VI} b^V a^V \\ c^{VI} c^V \\ d^{VI} a^V a^{IV} \\ d^{VI} b^V \\ e^{VI} a^V \\ f^{VI} \end{array} \right]$
I	2	I	I	2			
I	2	I	2	I			
I	2	I	3				
I	2	2	2				
I	2	3	I				
I	2	4					
I	3	I	I	I			
I	3	I	2				
I	3	2	I				
I	3	3					
I	4	I	I				
I	4	2					
I	5	I					
I	6						
.							
.							
.							
.							
n							$+ n^{(n)}$

*) L'involution lexicographique permute'e d'une somme n s'écrit chez HIND. ${}^n \mathcal{J}$, forme aussi expressive que simple.

HINDENBOURG qui l'inventa il y a sept ou huit ans et qui n'a cessé de le perfectionner depuis.

N° 1	N° 2	N° 3	N° 4
1 2 3 4	1 1 1	1 1 1	1
1 2 4 3	1 1 2	1 1 2	1 2
1 3 2 4	1 1 3	1 1 3	1 3
1 3 4 2	1 2 1	1 1 4	1 4
1 4 2 3	1 2 2	1 2 2	1 5
1 4 3 2	1 2 3	1 2 3	1 2 3
2 1 3 4	1 3 1	1 2 4	1 2 4
2 1 4 3	1 3 2	1 3 3	1 2 5
2 3 1 4	1 3 3	1 3 4	1 3 4
2 3 4 1	2 1 1	1 4 4	3 5
2 4 1 3	2 1 2	2 2 2	1 4 5
2 4 3 1	2 1 3	2 2 3	1 2 3 4
3 1 2 4	2 2 1	2 2 4	1 2 3 5
3 1 4 2	2 2 2	2 3 3	1 2 4 5
3 2 1 4	2 2 3	2 3 4	1 3 4 5
3 2 4 1	2 3 1	2 4 4	2 3 4 5
4 1 2 3	2 3 2	3 3 3	
4 1 3 2	2 3 3	3 3 4	
4 2 1 3	3 1 1	3 4 4	
4 2 3 1	3 1 2	4 4 4	
4 3 1 2	3 1 3		
4 3 2 1	3 2 1		
	3 2 2		
	3 2 3		
	3 3 1		
	3 3 2		
	3 3 3		

*) J'ai déjà exposé les caractéristiques de HINDENBOURG pour ces fonctions combinatoires. Dans mes formes tron-

No. 1 représente de bas en haut les permutations respectives de 1, 2, 3, 4 choses diverses; elle est continuable à volonté.

No. 2. indique les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. qu'on peut faire avec les choses 1, 2 et 3 en les répétant.

No. 3. est l'involution des 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés possibles avec les choses 1, 2, 3, et 4 répétées

N. 4 renferme tous les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, 4^{naires}, 5^{naires}, rangés des choses 1, 2, 3, 4, et 5, non répétées.

J'invite les amateurs à essayer aussi ces exemples immédiatement en lettres: un peu d'attention et beaucoup d'exercice feront trouver les règles dont l'énoncé serait trop long ici. C'est une belle propriété de l'Analyse Combinatoire de s'enseigner elle-même, dès qu'on en a les tableaux sous les yeux.

Il peut paraître surprenant, que ces tableaux, si utiles et d'une construction si simple, aient échappé aux grands analystes qui ont travaillé sur les combinaisons avant HINDENBURG. Mais en fait de système didactique, la facilité de l'invention est d'un tout autre genre que celle de l'exécution: vérité qui doit nous remplir d'admiration et de gratitude pour les fondateurs de nos sciences. La simplicité est toujours éminemment difficile à trouver, parcequ'elle est trop près de nous; qu'elle est, s'il m'est permis de parler ainsi, en deçà du foyer de notre esprit presbyte, naturellement porté à chercher au

quées d'aujourd'hui, je n'en donne pas de particulières; mais dans ma notation à cadre, j'exprime tout avec $\boxed{}$ modifié par des lignes et des points. Les indices s'écrivent dans ce cadre.

loin. *) En ne regardant qu'à la difficulté vaincue, les cinq règles de l'Arithmétique ont ainsi plus de mérite peut être que la découverte du calcul différentiel, préparée par d'autres découvertes : il en est de même de la Géométrie de Pythagore et de la Mécanique d'Archimède. Aujourd'hui qu'une étude de quelques mois conduit beaucoup, plus loin, on ne se doute pas de la peine infinie qu'a coûté cette facilité. Les mathématiques modernes sont, comme la grotte de Pausylippe, une chaussée plane, depuis que la patience des siècles a percé la montagne. Que n'en peut-on dire autant de toutes les autres sciences, surtout de celles qui intéressent de plus près le bonheur du genre humain!

§. 16. *Application seconde.* $cX^{L,q} = L (1 - X^q)^{**})$, en prenant $0^q = 1$ et les autres coefficients négatifs. Pour L , caractéristique des logarithmes naturels, on a ici

$$oN^{F,q} = -\frac{1}{N} \text{ et par la}$$

$$\begin{aligned} oN^{L,q} &= -N^q - \frac{1}{2} \cdot N^{q^2} - \frac{1}{3} \cdot N^{q^3} - \dots - \frac{1}{N} N^{q^N} \\ &= -\frac{1}{N} \left(\frac{N}{1} \cdot N^q + \frac{N}{2} \cdot N^{q^2} + \frac{N}{3} \cdot N^{q^3} + \dots + \frac{N}{N} \cdot N^{q^N} \right) \end{aligned}$$

En construisant l'involution, il faut donc diviser le coefficient de permutation des 1^{naires} par 1, celui des 2^{naires} par 2, celui des 3^{naires} par 3; et ainsi de suite. La

*) Ita fit plerumque; quae sunt ante oculos non videmus, facilia negligimus, venamur difficilia. HINDENB. *syst. comb. et perm. prim. lin.* p. XVII.

**) log. nat. p pour $p(1 - \kappa_1 x - \kappa_2 x^2 - \text{etc.})$

somme de ces coefficients de permutation modifiés par les multiplicateurs est

$$\frac{1}{N} \left(\frac{N}{1} + \frac{N}{2} \cdot \frac{N-1}{1} + \frac{N}{3} \cdot \frac{N-1}{1} \cdot \frac{N-2}{2} + + \right) = \frac{2^N - 1}{N}$$

ce qui fournit encore une vérification commode.

Exemple Ecrire sans calcul le coefficient de x^{10} dans le développement de $L(1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.})$. Il est, en posant d'abord les lettres, puis les coefficients modifiés,

$$\begin{aligned} ***) \quad L_q \\ {}_{10} \equiv & -\frac{1}{10} a^{10} - a^8 b - a^7 c - a^6 \left(3\frac{1}{2} b^2 + d \right) - a^5 (6bc + e) \\ & - a^4 \left(5b^3 + 5bd + 2\frac{1}{2} c^2 + f \right) - a^3 (10b^2 c + 4be + 4cd + g) \\ & - a^2 \left(2\frac{1}{2} b^4 + 6b^2 d + 6bc^2 + 3bf + 3ce + 1\frac{1}{2} d^2 + h \right) \\ & - a \left(4b^3 c + 3b^2 e + 6bcd + 2bg + c^3 + 2cf + 2de + i \right) \\ & - \frac{1}{5} b^5 - b^3 d - 1\frac{1}{2} b^2 c^2 - b^2 f - 2bce - bd^2 \\ & - bh - c^2 d - cg - df - \frac{1}{2} e^2. \end{aligned}$$

La somme des coefficients numériques étant $\frac{2^{10} - 1}{10} = 103\frac{1}{10}$

l'opération est vérifiée.

La construction involutoire de ${}_N^{L,q}$ offre encore des expédients particuliers, qu'on peut voir dans l'

Usus Logarithmorum Infinitinomii in theoria aequationum; Lipsiae 1796, opusculum de 46 pages, où l'auteur De Prasse a réuni à un haut degré la clarté et la précision. Quoique le contenu n'en soit pas élémentaire, il explique si bien la notation de HINDENBURG, qu'il peut être lû sans l'aide

*) $(\log p) \approx 10$.

d'aucun autre livre. La méthode combinatoire directe, indépendante d'indices numériques, n'était pas encore publiée alors : elle suivit de près cet ouvrage.

*) $L^{-1}_q X = 2,71828183$ a pour coefficient général $1 \cdot X + 2 \cdot X^2 + \text{etc.}$

**) $N = N + \frac{1}{2} \cdot N^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot N^3 + \dots + \frac{1}{2 \dots N} \cdot N^N$, expression d'un fréquent usage,

***) ${}^{\text{Sin}}_q X = \text{Sin}(0,78539816 + 1 \cdot X + 2 \cdot X^2 + \text{etc.})$ a son coefficient général à très peu près de la même forme :

$${}^{\text{Sin}}_q N = \left(N + \frac{1}{2} \cdot N^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot N^3 + \dots + \frac{1}{2 \dots N} \cdot N^N \right) \sqrt{\frac{1}{2}}$$

A ces détails explicatifs j'ajouterai trois emplois choisis, qui suffiront pour mettre hors de tout doute l'avantage de l'Analyse combinatoire en Algèbre.

§. 17. SERIES RÉCURRENTES. Moivre et après lui les plus grands analystes, entr' autres LAGRANGE et LAPLACE, ont donné successivement à cette théorie toute l'élégance analytique dont elle est susceptible. Il n'y a que la résolution des équations qui arrête. En simplifiant encore la méthode des substitutions successives, (sinon la plus ingénieuse, au moins la plus expéditive de celles que je connais) j'ai employé plus d'une heure à décomposer l'équation trinome,

*) h^p pour $p = ax + bx^2 + \text{etc.}$

**) $(h^p) \propto n$.

***) $\sin p$ pour $p = 0,785398 + ax + \text{etc.}$; $\sin p \propto n$, etc.

$x^{10} - 123x - 456789 = 0$, en ces dix facteurs

$$x - 3,681413, \quad x + 3,680681,$$

$$x - 2,978143 \pm 2,164013\sqrt{-1},$$

$$x - 1,137112 \pm 3,501100\sqrt{-1},$$

$$x + 2,977918 \pm 2,163319\sqrt{-1},$$

$$x + 1,137802 \pm 3,500671\sqrt{-1},$$

Le calcul des termes $(a + b\sqrt{-1})^n$ a aussi ses longueurs. Il s'ensuit qu'excepté le cas interpolatoire de x fractionnaire ou très grand, le développement immédiat est ordinairement préférable aux formes englobées : aussi EULER et LAGRANGE, s'en sont sérieusement occupés. Ce qui peut manquer à leurs travaux, doit être attribué au calcul différentiel, insuffisant pour déterminer réellement les lois compliquées.

L'an passé (1800) TREMBLEY, HINDENBOURG, et ARBOGAST traitèrent enfin les séries récurrentes combinatoirement. C'est la méthode du second de ces géomètres que je présenterai, après avoir énoncé la question.

f , f et F désignant des fonctions différentes, l'équation identique

$$\frac{f_0 + f_1.X + f_2.X^2 + \text{etc.}}{1 - f_1.X - f_2.X^2 - \dots - f_r.X^r} = f_0 + F_1.X + F_2.X^2 + \text{etc.}$$

devient, en multipliant de part et d'autre par le dénominateur, et comparant les coefficients respectifs de X^n ,

$$F_n = f_1.F(n-1) + f_2.F(n-2) + \dots + f_r.F(n-r) + f_n.$$

Ce terme général d'une série récurrente du r ième ordre est le cas le plus étendu qu'on ait résolu jusqu'aujourd'hui, à l'aide du calcul des r racines de $z^r = f_1.z^{r-1} + f_2.z^{r-2} + \dots + f_r$, d'une sommation aux différences finies et d'une détermination des r constantes qui devient fort longue quand r est un peu grand.

Solution combinatoire. En faisant $0 = 1$,

$$1 = -f_1, \text{ etc. j'ai } (1 - f_1 X - f_2 X^2 - \dots - f_n X^n)^{-1} = 0 X^{q-1} =$$

$$1 + \cdot {}_0^{q-1} 1 X + \cdot {}_0^{q-1} 2 X^2 + \dots + \cdot {}_0^{q-1} n X^n + \text{etc.}, \text{ et partant}$$

$$(f_0 + f_1 X + \text{etc.}) (1 + \cdot {}_0^{q-1} 1 X + \cdot {}_0^{q-1} 2 X^2 + \text{etc.}) \\ = f_0 + F_1 X + F_2 X^2 + \dots + F_n X^n + \text{etc.}$$

Le développement fait, l'identité des coefficients de X^n dans les deux membres procure

$$F_n = f_0 \cdot {}_0^{q-1} n + f_1 \cdot {}_0^{q-1} n-1 + f_2 \cdot {}_0^{q-1} n-2 + \dots + f_n.$$

Or en général $\cdot {}_0^{q-1} N$ est l'involution lexicographique rangée du §. 15. Il suffit donc d'y changer, dans les coefficients de permutation, N successivement en $n, n-1, n-2$, jusques 1, en supprimant les produits multipliés par $r+1, r+2$, etc. qui sont nuls, puisque $f(r+1)$, etc. le sont par supposition. On multiplie ensuite respectivement par f_0, f_1 , jusques f_n .

Cette solution, pour la rapidité de la marche et la simplicité du résultat, me semble ne pouvoir être surpassée.

Exemple, $100 + 33,83333x + 11,44444x^2 \\ + 3,85648x^3 - 18,70618x^4 - 13,00067x^5 + 6,62225x^6 \\ - 2,97870x^7 + 2,74934x^8 + 3,51658x^9 + 2,49666x^{10} \\ + 1,42795x^{11} - 0,07389x^{12} + 0,72815x^{13} - 0,74225x^{14} \\ - 0,53341x^{15} - 0,16302x^{16} + 0,09129x^{17} + 0,12738x^{18} \\ + \text{etc.}$

La recurrence étant donnée par

$F n = \frac{1}{3} F(n-1) - \frac{1}{5} F(n-4) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n}$, ce coefficient général est

$$\begin{aligned}
 &= 100 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \\
 &= 100 \left(\frac{1}{3^n} - \frac{n-3}{3^{n-4} \cdot 5} + \frac{(n-6)(n-7)}{3^{n-8} \cdot 5^2} - \text{etc.} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n-4}{3^{n-5} \cdot 5} + \frac{(n-7)(n-8)}{3^{n-9} \cdot 5^2} - \text{etc.} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{3^{n-2}} - \frac{n-5}{3^{n-6} \cdot 5} + \frac{(n-8)(n-9)}{3^{n-10} \cdot 5^2} - \text{etc.} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{3^{n-3}} - \frac{n-6}{3^{n-7} \cdot 5} + \frac{(n-9)(n-10)}{3^{n-11} \cdot 5^2} - \text{etc.} \right)
 \end{aligned}$$

+ etc., etc. Les termes qui contiennent des exposants négatifs se négligent. Ainsi $n = 0$ donne 100; $n = 1$ donne 33,83333; $n = 2$ donne 11,44444, comme cela doit être. Si l'expression de $F n$ est longue, celle de la série recurrente sommée à l'infini est fort courte.

$$\frac{100 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^4} = \frac{99x - 1 + 2,7182818^x}{x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4}$$

Des groupes plus compliqués, par exemple,

$$\frac{(a + b x + c x^2 + \text{etc.})^m (a' + b' x + \text{etc.})^n}{(a'' + b'' x + c'' x^2 + \text{etc.})^r (a''' + b''' x + \text{etc.})^s},$$

se développent avec la même facilité.

§. 18. REVERSION FONCTIONNAIRE-COMBINATOIRE. Etant donné l'équation quelconque $fz = 0$, exprimer Fz en fonction connue d'une arbitraire x .

Ayant écrit $fz = fx - fx$, je prens de part et d'autre la fonction $F f^{-1}$, et j'obtiens, en me souvenant

que d'après le Développement général, $Ff^{-1}f$ équivaut à F ,

$$Fz = Ff^{-1}(fx - f\infty) =$$

$$Fx - \frac{dFx}{1 \cdot dfx} \cdot f\infty + \frac{d^2Fx}{1 \cdot 2 dfx^2} \cdot fx^2 - \frac{d^3Fx}{1 \cdot 2 \cdot 3 dfx^3} \cdot fx^3$$

+ etc. après avoir développé par le théorème de Taylor; x est absolument ce qu'on veut.

Exemple. De $z - \cos z = 0$, tirer immédiatement $h^{-z} = 2,7182818^{-z}$ en fonction d'une approximation première ad libitum.

En faisant pour abrégier $\sin x = s$, $\cos x = c$, la formule donne

$$h^{-z} = h^{-x} (1 + (1+s)^{-1}(x-c) + \frac{1}{2} [(1+s)^{-2} + c(1+s)^{-3}] (x-c)^2 + \frac{1}{6} [(1+s)^{-3} + (3c+s)(1+s)^{-4} + 3c^2(1+s)^{-5}] (x-c)^3 + \text{etc.}$$

On voit ici que malgré la simplicité de l'exemple proposé, la formule différentielle laisse bientôt perdre la loi. Voyons ce que peut l'Analyse Combinatoire, aidée de la différentielle.

Nous avons d'abord (Dév. gén. §. 6.) cette con-

$$\text{version } \frac{d^N Fx}{1 \cdot 2 \dots N dfx^N} = \frac{d^{N-1} \left[\frac{dFx}{dx} \cdot \left(\frac{fx - fa}{x-a} \right)^{-N} \right]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots N dx^{N-1}},$$

la constante a devenant x après les différentiations.

En supposant $\frac{fx - fa}{x-a} = oX^q$, on a ensuite par le théorème $d^n(pq) = p d^n q + \text{etc.}$

$$\frac{d^N F x}{1.2..N dx^N} = \frac{d^{N-1} \left[\frac{dF x}{dx} \cdot oX^{-N} \right]}{1.2.3....N dx^{N-1}} =$$

$$\frac{d^N F x}{dx^N} \cdot oX^{-N} + \frac{N-1}{1} \cdot \frac{d^{N-1} F x}{dx^{N-1}} \cdot \frac{d(oX^{-N})}{dx}$$

$$+ \frac{N-1}{1} \cdot \frac{N-2}{2} \cdot \frac{d^{N-2} F x}{dx^{N-2}} \cdot \frac{d^2(oX^{-N})}{dx^2}$$

$$+ \dots + \frac{N-1}{1} \cdot \frac{d^2 F x}{dx^2} \cdot \frac{d^{N-2}(oX^{-N})}{dx^{N-2}} + \frac{dF x}{dx} \cdot \frac{d^{N-1}(oX^{-N})}{dx^{N-1}},$$

le tout divisé par 1.2.3....N. Voilà

déjà la difficulté rappelée à la différentiation des fonctions simples $\frac{dF x}{dx}$ et $\left(\frac{fx - fa}{x - a} \right)^{-N}$. Mais comme la puissance négative et la condition de changer finalement a en x , mettent encore la loi en danger et obligent au moins à des circuits, développons oX^q combinatoirement.

$$oX^q = o + 1.X + 2.X^2 + \dots + oM.X^M + \text{etc.} =$$

$$\frac{fx - fa}{x - a} = \frac{dfa}{da} + \frac{d^2fa}{2da^2} \cdot (x-a) + \frac{d^3fa}{2.3.da^3} (x-a)^2 + \text{etc.,}$$

$$X \text{ étant ici } = x - a \text{ et } oM^q = \frac{d^{M+1}fa}{2.3..(M+1)da^{M+1}}$$

Or par §. 2. nous avons

$$oX^{-N} = oX^{-N} = o + 1.X + \dots + oR.X^R + \text{etc. et partant,}$$

$$\frac{d^R (0X^q - N)}{dx^R} = 1. 2. 3. \dots R. 0R^q, \text{ en mettant après}$$

la différentiation x pour a , ce qui annule X .

Comme $0^q = \frac{df a}{da} = \frac{df x}{dx}$, nous aurons donc par le

$$\S. 15, 0R^q = \frac{N}{1} \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot R^q - \frac{N}{1} \cdot \frac{N+1}{2}$$

$$\left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-2} \cdot R^{q^2} + \frac{N}{1} \cdot \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N+2}{3} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-3} \cdot$$

$$R^{q^3} - \frac{1}{1} \cdot \frac{N}{1} \cdot \dots - \frac{N+R-1}{R} \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-NR} \cdot R^{qR}.$$

$$0^q - N$$

00 fait exception à cette formule; mais on sait par

$$(0 + X)^q - N \text{ que sa valeur est } 0^q - N = \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N}.$$

En faisant R succesivement $1, 2$, jusques $N - 1$, et substituant les resultats

$$\frac{d(0X^q - N)}{dx} = 1. 0^q - 1 = N \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot 1$$

$$\frac{d^2(0X^q - N)}{dx^2} = 1. 2. 0^q - 2 =$$

$$1. 2 \left[\frac{N}{1} \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot 1 - \frac{N}{1} \cdot \frac{N+1}{2} \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-2} \cdot 1^2 \right]$$

et ainsi de suite, dans la série de $\frac{d^N F x}{1. \dots N \frac{df x}{dx}^N}$, elle devient après la suppression des facteurs qui se compensent,

$$\begin{aligned}
\frac{d^N F x}{1.2..N df x^N} &= \frac{d^N F x}{1..N dx^N} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N} \\
&+ \frac{d^{N-1} F x}{1..N-2. dx^{N-1}} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot \frac{q}{2} \\
&+ \frac{d^{N-2} F x}{1..N-3. dx^{N-1}} \\
&\left[\left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot \frac{q}{2} + \frac{N+1}{2} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-2} \cdot \frac{q^2}{2} \right] \\
&+ \frac{d^{N-3} F x}{1..N-4. dx^{N-2}} \\
&\left[\left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-1} \cdot \frac{q}{3} - \frac{N+1}{2} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-2} \cdot \frac{q^2}{3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N+2}{3} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N-3} \cdot \frac{q^3}{3} \right]
\end{aligned}$$

+ etc., etc. On continuera cette série jusques inclusive-
ment le premier terme dont le dénominateur devient un
zéro qui se supprime. La raison de cette suppression,
qui peut surprendre, est dans la suite

$$k^0 + \frac{k^1}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc. où le terme in-}$$

itial n'a proprement dit point de diviseur.

Le coefficient général trouvé ne donne les valeurs
que depuis $N = 2$; mais pour $N = 0$ etc. 1, on a les
termes correspondans $F x = \frac{d F x}{d f x} \cdot f x$ tout réduits.

On peut aussi ordonner la série de la manière
suivante

$$\frac{d^N F x}{1..N df x^N} = \frac{d^N F x}{1..N dx^N} \cdot \left(\frac{df x}{dx} \right)^{-N}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{dfx}{dx} \right)^{-N-1} \\
& \left[\frac{d^{N-1} Fx}{1..N-2. dx^{N-1}} \cdot \frac{q}{1} + \frac{d^{N-2} Fx}{1..N-3. dx^{N-2}} \cdot \frac{q^2}{2} + \text{etc.} \right] \\
& - \frac{N+1}{2} \left(\frac{dfx}{dx} \right)^{-N-2} \\
& \left[\frac{d^{N-2} Fx}{1..N-3. dx^{N-2}} \cdot \frac{q^2}{2} + \frac{d^{N-3} Fx}{1..N-4. dx^{N-3}} \cdot \frac{q^3}{3} + \text{etc.} \right] \\
& + \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N+2}{3} \left(\frac{dfx}{dx} \right)^{-N-3} \\
& \left[\frac{d^{N-3} Fx}{1..N-4. dx^{N-3}} \cdot \frac{q^3}{3} + \frac{d^{N-4} Fx}{1..N-5. dx^{N-4}} \cdot \frac{q^4}{4} + \text{etc.} \right] \\
& - \frac{N+1}{2} \cdot \frac{N+2}{3} \cdot \frac{N+3}{4} \left(\frac{dfx}{dx} \right)^{-N-4} \\
& \left[\frac{d^{N-4} Fx}{1..N-5. dx^{N-4}} \cdot \frac{q^4}{4} + \text{etc.} \right] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

On ne perdra pas de vue que dans les colonnes com-

binatoires $1, \overset{q}{2}, \overset{q}{3}, \text{etc.}; \overset{q^2}{2}, \overset{q^3}{2}, \text{etc.}; \overset{q^3}{3}, \text{etc.}, \text{etc.}, M$

$$\text{est} = \frac{d^{M+1} fx}{1..M+1. dx^{M+1}}$$

Cette solution est aussi courte que sa grande généralité le comporte et nous possédons sa loi de deux manières. Je n'ai donné tant d'étendue au problème que pour montrer ce que peut l'Analyse Combinatoire en fait de développemens compliqués. ESCHENBACH, ROTHÉ et HINDENBOURG ont donné des Reversions sans arbitraire x , incomparablement plus traitables. Celle du dernier mérite par son élégance toute l'attention des géomètres.

Je ne disconviens pas d'ailleurs que les substitutions successives ne soient plus expéditives que les sé-

ries pour l'évaluation des racines numériques. EULER l'a déjà remarqué. L'exemple proposé: De $z - \cos z = 0$, conclure $h - z$, ne demande qu'un quart d'heure par la méthode des substitutions successives. Dans la 3^{me} partie de mon Essai de Caractéristique Combinatoire je donne à cette méthode des règles qui laissent, j'espère, peu à désirer pour l'usage.

§. 19. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN FACTEURS BINOMES. Je me propose à dessein des cas très difficiles.

Problème 1^r Changer Fx en un produit de la forme

$(1 + X)^{\overline{1}} (1 + X^2)^{\overline{2}} (1 + X^3)^{\overline{3}}$ etc. etc.; $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$, etc. étant à déterminer. Je suppose pour simplifier que X nul, change Fx en 1. Comme le calcul immédiat compliquerait, passons d'abord aux logarithmes naturels pour avoir, en représentant Fx par $oX = 1 + 1.X + 2.X^2 + \text{etc.}$

$$L(oX) \text{ ou } oX^L = \overline{1}. L(1 + X) + \overline{2}. L(1 + X^2) + \overline{3}. L(1 + X^3) + \text{etc.}$$

En développant ici le membre gauche combinatoirement et le droit analytiquement on obtient

$$\begin{array}{c} L. \qquad L. \qquad L. \\ o1.X + o2.X^2 + o3.X^3 + \text{etc.} = \\ \left[\overline{1}.X - \frac{\overline{1}}{2}.X^2 + \frac{\overline{1}}{3}.X^3 - \frac{\overline{1}}{4}.X^4 + \frac{\overline{1}}{5}.X^5 + \text{etc.} \right] \\ \left[+ \frac{\overline{1}}{2} \right] \left[- \frac{\overline{1}}{3} \right] \left[- \frac{\overline{1}}{2}.2 \right] \left[+ \frac{\overline{1}}{5} \right] \end{array}$$

équation identique, dont je tire

$$\overset{L.}{1} = \overset{L.}{0}1 = 1, \quad \overset{L.}{2} = \overset{L.}{0}2 + \frac{1}{2} \cdot \overset{L.}{1} = \overset{L.}{0}2 + \frac{1}{2} \cdot 1,$$

$$\overset{L.}{3} = \overset{L.}{0}3 - \frac{1}{3} \cdot 1, \quad \overset{L.}{4} = \overset{L.}{0}4 + \frac{1}{2} \cdot \overset{L.}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \overset{L.}{0}4 + \frac{1}{2} \cdot \overset{L.}{0}2 + \frac{1}{4} \cdot 1,$$

$$\overset{L.}{5} = \overset{L.}{0}5 - \frac{1}{5} \cdot 1, \quad \overset{L.}{6} = \overset{L.}{0}6 + \frac{1}{2} \cdot \overset{L.}{3} - \frac{1}{3} \cdot \overset{L.}{2} + \frac{1}{6} \cdot 1, \quad \overset{L.}{7} = \overset{L.}{0}7 - \frac{1}{7} \cdot 1,$$

et ainsi de suite.

Le Développement général donne la manière combinatoire directe de parvenir à l'exposant général $\bar{N}$; mais voici un autre procédé, qui dans le cas présent conduit plus vite au but.

Pour construire $\bar{N} = \overset{L.}{0}N \dots \pm \frac{1}{N} \cdot 1$, je remarque que chacun des termes intermédiaires est ici $\pm \frac{1}{R} \cdot \bar{S}$ pour $RS = N$; R et S étant des entiers > 1 et $< N$, le signe $+$ ayant lieu pour R pair, et $-$ pour R impair. Cette considération fournit des valeurs très simples pour N nombre premier, qui n'a point de diviseurs, hors l'unité et lui-même. En ce cas

$$1) \quad \bar{N} = \overset{L.}{0}N - \frac{1}{N} \cdot 1.$$

Soit $N = RS$, produit de deux facteurs premiers: donc

$$\bar{N} = \overset{L.}{0}N - \frac{1}{R} \cdot \bar{S} - \frac{1}{S} \cdot \bar{R} - \frac{1}{N} \cdot 1,$$

ou bien, en mettant les équivalens de S et R connus par 1)

$$2) \quad \bar{N} = \overset{L.}{0}N - \frac{1}{R} \cdot \overset{L.}{0}S - \frac{1}{S} \cdot \overset{L.}{0}R + \frac{1}{N} \cdot 1.$$

H

N, produit de 3 facteurs premiers R, S, T, donne à l'aide de 1) et 2) cette formule

$$3) N = \overset{L.}{\circ}N - \frac{1}{R} \overset{L.}{\circ}ST - \frac{1}{S} \overset{L.}{\circ}RT - \frac{1}{T} \overset{L.}{\circ}RS \\ + \frac{1}{RS} \overset{L.}{\circ}T + \frac{1}{RT} \overset{L.}{\circ}S + \frac{1}{ST} \overset{L.}{\circ}T - \frac{1}{N} \overset{L.}{\circ}1,$$

Les formules pour N, produit de 4, 5, enfin de tant de facteurs premiers qu'on veut, se construisent sans autre peine que d'écrire. et voici comment.

„Décomposez le produit $RSTU \dots = N$ en 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés, qui formeront les dénominateurs des fractions $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{S}$, $\frac{1}{T}$, etc.; $\frac{1}{RS}$, $\frac{1}{RT}$, etc.; $\frac{1}{RST}$, etc.; etc. Chacune de ces fractions s'accompagnera d'un coefficient de LFx , dont le numéro sera N multiplié par la fraction. Les 1^{naires}, 3^{naires}, 5^{naires}, etc. ont le signe —; les 2^{naires}, 4^{naires}, etc. ont le signe +.

Cette détermination d'un terme général combinatoire à l'aide des facteurs premiers de son numéro, est très singulière et peut enrichir la Science des Nombres, partie, que LEGENDRE a le premier réduit en corps de doctrine, avec un succès qui lui assure la reconnaissance universelle.

Problème 2^d. Convertir $\overset{L.}{\circ}X$, fonction quelconque de X, en

$$(1 + 1.X) (1 + 2.X^2) (1 + 3.X^3) \text{ etc.}$$

Je suppose encore $\overset{L.}{\circ}X = 1 + 1.X + 2.X^2 + \text{etc.}$, forme toujours possible, en multipliant ou divisant la fonc.

tion par une constante et développant par le théorème de TAYLOR. Le calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \dot{X} &= 1 + \dot{1}.X + \dot{2}.X^2 + \text{etc.} = \\ &1 + \overline{1}.X + \overline{2}.X^2 + \overline{3} \left. \begin{array}{l} X^3 + \\ + \overline{1} \overline{2} \end{array} \right\} X^3 + \overline{4} \left. \begin{array}{l} X^4 + \\ + \overline{1} \overline{3} \end{array} \right\} X^4 + \overline{5} \left. \begin{array}{l} X^5 + \\ + \overline{1} \overline{4} \\ + \overline{2} \overline{3} \end{array} \right\} X^5 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$\dot{N}$ est ici une involution à sonimé N , sans répétition ni permutation, soit effective, soit par coefficients. Par la comparaison des termes homologues, on trouve

$$\begin{aligned} \overline{1} &= 1, \quad \overline{2} = 2, \quad \overline{3} = 3 - \overline{1} \overline{2}, \quad \overline{4} = 4 - \overline{1} \overline{3}, \\ \overline{5} &= 5 - \overline{1} \overline{4} - \overline{2} \overline{3}, \quad \overline{6} = 6 - \overline{1} \overline{5} - \overline{2} \overline{4} - \overline{1} \overline{2} \overline{3}, \\ \overline{7} &= 7 - \overline{1} \overline{6} - \overline{2} \overline{5} - \overline{3} \overline{4} - \overline{1} \overline{2} \overline{4}, \\ \overline{8} &= 8 - \overline{1} \overline{7} - \overline{2} \overline{6} - \overline{3} \overline{5} - \overline{1} \overline{2} \overline{5} - \overline{1} \overline{3} \overline{4}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

La substitution successive, tâtonnement inventif, qui fait si souvent, à l'aide des chiffres Leibnitzziens, démêler les loix compliquées, nous donne

$$\begin{aligned} \overline{1} &= 1, \quad \overline{2} = 2, \quad \overline{3} = 3 - \overline{1} \overline{2}, \quad \overline{4} = \overline{1} \overline{3} - \overline{1} \overline{1} \overline{2}, \\ \overline{5} &= 5 - \overline{1} \overline{4} + \overline{1} \overline{1} \overline{3} - \overline{1} \overline{1} \overline{1} \overline{2}, \\ &\quad - \overline{2} \overline{3} + \overline{1} \overline{2} \overline{2}, \\ \overline{6} &= 6 - \overline{1} \overline{5} + \overline{1} \overline{1} \overline{4} - \overline{1} \overline{1} \overline{1} \overline{3} + \overline{1} \overline{1} \overline{1} \overline{1} \overline{2}, \\ &\quad - \overline{2} \overline{4} + \overline{1} \overline{2} \overline{3} - \overline{1} \overline{1} \overline{2} \overline{2}. \end{aligned}$$

Jusques ici ces valeurs sont des décompositions rangées de N avec répétition et exclusion des termes composés d'un produit du même chiffre, tel par exemple que $\dot{2} \dot{2}$, $\dot{4} \dot{4} \dot{4}$, etc. Mais cette loi, manifeste en apparence, change à

$$\begin{aligned} \overline{7} &= \overline{7} - \dot{1} \dot{6} + \ddot{1} \dot{1} \dot{5} - \ddot{1} \ddot{1} \dot{1} \dot{4} + \ddot{1} \ddot{1} \ddot{1} \dot{1} \dot{3} - \ddot{1} \ddot{1} \ddot{1} \ddot{1} \dot{1} \dot{2}; \\ &\quad - \dot{2} \dot{5} + 2. \dot{1} \dot{2} \dot{4} - 3. \dot{1} \dot{1} \dot{2} \dot{3} + 2. \dot{1} \dot{1} \dot{1} \dot{2} \dot{2} \\ &\quad - \dot{3} \dot{4} + \ddot{1} \ddot{3} \dot{3} - \ddot{1} \ddot{2} \dot{2} \dot{2} \\ &\quad + \ddot{2} \dot{2} \dot{3} \end{aligned}$$

ce qui doit mettre en gardes contre les inductions précipitées. Recourons aux logarithmes, qui changeront

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (1 + \overline{1} \cdot X) (1 + \overline{2} \cdot X^2) (1 + \overline{3} \cdot X^3) \text{ etc. en} \\ \text{L.} \quad \text{L.} \quad \text{L.} \\ \dot{1} \cdot X + \dot{2} \cdot X^2 + \dot{3} \cdot X^3 + \text{etc.} &= \\ \text{L}(1 + \overline{1} \cdot X) + \text{L}(1 + \overline{2} \cdot X^2) + \text{etc.} &= \\ \left. \begin{aligned} \overline{1} \cdot X - \frac{1}{2} \cdot \overline{1}^2 \cdot X^2 + \frac{1}{3} \cdot \overline{1}^3 \cdot X^3 - \frac{1}{4} \cdot \overline{1}^4 \cdot X^4 + \text{etc.} \\ + \frac{1}{2} \cdot \overline{2}^2 \cdot X^4 + \frac{1}{3} \cdot \overline{2}^3 \cdot X^5 - \frac{1}{4} \cdot \overline{2}^4 \cdot X^6 + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Par la comparaison des termes homologues, on trouve en transposant

$$\overline{N} = \text{L.} \quad \overline{N} = \dot{N} \dots, \dots \pm \frac{1}{N} \cdot \dot{1}^N. \text{ Ici les termes in-}$$

termédiaires se déterminent au moyen de la forme

$$\frac{1}{R} (-\overline{S})^R \text{ pour } N = RS \text{ aux mêmes conditions}$$

que dans le problème précédent. Si N est un nombre premier, on a ici

$$\overline{N} = {}^L_0N - \frac{1}{N} \cdot i^N.$$

Au moyen de cette formule, on en construira pour N produit de 2, 3, enfin de tant de facteurs premiers qu'on veut.

Ma transformation d'une fonction générale en un produit de binomes à puissances successives de la variable, est, je pense, entièrement neuve, et ne manquera pas de trouver son emploi. Non seulement l'Analyse différentielle est insuffisante ici, mais encore chaque autre hors la combinatoire. On se rapellera que j'ai mis dans tout son jour, que l'Analyse Combinatoire est le Calcul ordinal ou des rapports de situation.

APPENDICE SUR LES RAPPORTS DE SITUATION.

En mettant un ordre dans une suite d'idées, il en résulte nécessairement des ordres accessoires dont la contemplation fournit sans cesse des théorèmes nouveaux. Pour me borner aux objets les mieux connus: de la suite des unités naissent les nombres naturels et les figurés de toute espèce; les nomenclatures et classifications méthodiques, la construction des langues vulgaires et philosophiques dérivent de certains mots-racines qu'on combine et modifie plus ou moins systématiquement. L'art de retenir et de raisonner, celui même d'inventer, n'ont point d'autre base: l'homme de génie ne se distingue que par l'imagination aidée du goût, c'est à dire, par la faculté de former plus de combinaisons et d'en choisir les meil-

leures; delà les différences du génie. Pythagore et Homère avaient plus d'imagination qu'Archimède et Virgile; ceux-ci l'avaient plus sage. Il est difficile de prononcer sur la prééminence, mais encore plus d'enseigner l'imagination et le goût, et surtout de déterminer comment l'homme extraordinaire les acquiert. Tel croit le génie un pur don de la nature, tel un résultat d'un travail opiniâtre; ce qui est certain, c'est que si l'assiduité n'est pas toujours la mère du génie, elle en est aumoins constamment la nourrice. Au reste il n'y a guère que les gens sans génie qui raisonnent bien sur le génie; celui-ci préfère d'étonner le monde au soin minutieux de se scruter lui-même.

Personne ne doute d'ailleurs que de bonnes règles, faciles à retenir et à combiner, ne conduisent plus sûrement à la science, qu'une recherche à l'aventure, où l'esprit épuise ses forces en vain. La brièveté de l'énoncé, en soulageant la mémoire, aide extrêmement le jugement; c'est l'avantage de l'algèbre et des tableaux combinatoires. A la rigueur on peut s'en passer; le discours vulgaire peut exprimer l'algèbre la plus savante: mais avec quelle diffusion!

Ces tableaux déduisent de la situation des signes arbitraires, des rapports constans entre les idées qui répondent à ces signes; voilà ce que j'entens par RAPPORT DE SITUATION.

Nous n'avons considéré jusques ici que la situation linéaire et plane: cette dernière est celle qui résulte de l'ordonnance horisontale et verticale des signes; l'oblique, plus ou moins inclinée, n'en est qu'une conséquence. L'ordonnance solide, ou selon trois dimension, n'a encore été que peu considérée, elle promet cependant des résultats encore plus inté-

ressans par leur généralité, et je compte m'en occuper un jour.

Le modèle combinatoire le plus ancien, et sans contredit le plus parfait, de l'ordonnance plane est l'Involution Lexico-stélégraphique, connue sous le nom de Table de Pythagore.

<u>01</u>	02	03	04	05	06	07	08	09	
02, 04	06	08	10	12	14	16	18		etc.
03, 06, 09	12	15	18	21	24	27			
04, 08, 12, 16	20	24	28	32	36				etc.
05, 10, 15, 20, 25	30	35	40	45					etc.
06, 12, 18, 24, 30, 36	42	48	54						
07, 14, 21, 28, 35, 42, 49	56	63							
08, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64	72								etc.
09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81									
etc.		etc.			etc.				

Les suites horizontales et verticalès ont les premières différences constantes, les secondes différences sont constantes dans les suites obliques interminées; il en est de même dans les obliques terminées, à cela près qu'elles s'étendent symétriquement des deux cotés.

De ce tableau continuable à l'infini, on tire par évolution

01 ; 01, 02 ; 01, 02, 03 ; 01, 02, 03, 04 ; etc,
 02, 04 02, 04, 06 02, 04, 06, 08
 03, 06, 09 03, 06, 09, 12
 04, 08, 12, 16

Ces évolutions, ou parties génératrices de l'involution, sont des tables de multiplication pour les échelles de numération de 1, 2, 3, 4, etc. chiffres significatifs.

Le tableau des nombres figurés est du même genre :

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Les diagonales terminées sont le développement du binome $(1+1)^n$, tandis que les obliques interminées présentent des suites d'une sommation moins facile, la forme du terme général étant exponentielle. Par exemple

$$1 + \frac{2}{1} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{n(n+1)(n+2) \dots (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1} + \text{etc.}$$

Une involution stélégraphique d'un usage non moins étendu que les précédentes et plus belle encore par sa simplicité, et ses conséquences singulières, est la suivante, sur laquelle HINDENBURG a établi son invention des facteurs des nombres,*) au moyen d'un mésurage qui donne les nombres premiers par exclusion : méthode, qui n'a pas encore été égalée et qui est si prodigieusement rapide qu'une table continuée jusqu'à 10 millions ne serait que le travail de quelques an-

*) C. F. HINDENBURG's Beschreibung einer neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem zu finden. Leipzig 1776; opusculé de 120 pages avec des annexes et une planche.

nées. On ne peut que regretter que le public n'ait pas mieux secondé l'auteur.

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	etc.
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	etc.
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	etc.
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	etc.
etc.		etc.		etc.						

Un enfant et même une machine, (par exemple une roue à dix dents, portant les chiffres 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, et dix roues portant un seul de ces chiffres autant de fois qu'on veut) peuvent construire cette table qui n'exige aucun calcul. Pour y accompagner chaque nombre de tous ses facteurs, il suffit d'appliquer une règle ou un patron et de copier des chiffres. Quand on veut se borner au plus petit et au plus grand facteurs, il ne faut qu'autant de mesurages qu'il y a de nombres premiers entre 1 et $\sqrt{1000000} = 1000$. Je le répète; on n'a pas apprécié, comme on le devait, cette ingénieuse simplicité.

Une autre involution stélégraphique remarquable par sa simplicité, est la Dyadique :

	o o o o o	=	o
	o o o o I		1
	o o o I o		2
	o o o I I		3
	o o I o o		4
	o o I o I		5
	o o I I o		6
etc.	o o I I I		7
	o I o o o		8
	o I o o I		9
	o I o I o		10
	o I o I I		11
	o I I o o		12
	o I I o I		13
	o I I I o		14
	o I I I I		15
	I o o o o		16
	etc.		etc.

Ecrivez d'abord en ligne verticale o I o I o I o I etc. puis cette même suite en doublant chaque chiffre, o o I I o o I I etc., puis en quadruplant, octuplant etc.

Cette table est la numération de l'Arithmétique binaire, par laquelle L E I B N I T Z expliqua si heureusement la figure mystérieuse des huit Coua inventée par Fohi et si fameuse à la Chine où elle fût de tems immémorial l'objet des recherches des lettrés.

-- -- -- -- -- -- --
 -- -- -- -- -- -- --
 -- -- -- -- -- -- --

La ligne brisée représentant o et la droite I, cette figure est l'équivalent de

o I 2 3 4 5 6 7.

C'est peut-être là l'origine du mystère attribué au nombre 7 dès la plus haute antiquité, s'il ne le doit pas aux phases de la lune, d'où nos semaines ont certainement la quantité des jours. Au reste je suis porté comme les Chinois à supposer plus qu'un système de numération dans les Coua. Les trois lignes ont du rapport avec les trois dimensions de l'espace; la ligne simple et la ligne brisée peuvent correspondre à d'autres idées. Quoiqu'il en soit, ce monument de la plus haute antiquité annonce un dessein manifestement combinatoire.

Quelques fois l'ordre stélégraphique n'est pas apparent. Soit, par exemple, (*Développement Générale* §. 4) le cofacteur de 01 dans F, qui est

$$\begin{array}{rcl}
 56. 45. 34. 23. 12 & = & 56. 45. 34. 23. 12 \\
 46. 34. 23. 12 & & \dots 46. 34. 23. 12 \\
 56. 35. 23. 12 & & 56. \dots 35. 23. 12 \\
 36. 23. 12 & & \dots \dots 36. 23. 12 \\
 56. 45. 24. 12 & & 56. 45. \dots 24. 12 \\
 46. 24. 12 & & \dots 46. \dots 24. 12 \\
 56. 25. 12 & & 56. \dots \dots 25. 12 \\
 26. 12 & & \dots \dots \dots 26. 12 \\
 56. 45. 34. 13 & & 56. 45. 34. \dots 13 \\
 46. 34. 13 & & \dots 46. 34. \dots 13 \\
 56. 35. 13 & & 56. \dots 35. \dots 13 \\
 36. 13 & & \dots \dots 36. \dots 13 \\
 56. 45. 14 & & 56. 45. \dots \dots 14 \\
 46. 14 & & \dots 46. \dots \dots 14 \\
 56. 15 & & 56. \dots \dots \dots 15 \\
 16 & & \dots \dots \dots \dots 16
 \end{array}$$

Ecrit comme dans le membre droit, 56 alterne avec une place vuide, 45. 46 avec deux, 34, 34, 35, 36 avec quatre; et ainsi de suite, le nombre des places vuides étant constamment celui des remplies. Quant à la suite des nombres, elle est telle:

De bas en haut les groupes linéaires commencent à 16, 26, 36, 46, 56. Pour en faire des binaires verticaux, on ajoute le nombre immédiatement inférieur 5, 25, 35, 45; pour changer les binaires en quaternaires, on ajoute le nombre suivant deux fois; c'est à dire 14. 14, 24, 24, 34, 34, pour changer les quaternaires en 8^{naires}, on ajoute autant que besoin les nombres respectifs 13 et 23. Et ainsi de suite.

Le lecteur n'a pu manquer d'apercevoir que l'Analyse Combinatoire, en menant toujours directement au but, multiplie encore les solutions; ce qui sert au moins à vérifier les résultats. Mais il en résulte encore des ressources pour les cas difficiles, et une abondance précieuse d'idées, qui multiplie les vues et encourage l'esprit à chercher, en lui donnant le sentiment de ses forces. Si par fois il semble que le problème n'a qu'une seule solution, il ne faut pas se décourager: en tournant et retournant en divers sens, on en découvre d'autres, qui conduisent ordinairement plus loin. La permutation de n chiffres à 1, à 2, à 3, etc. se refuse aux involution exposées; la voici dans une forme involutoire nouvelle, où les nombres semblent ne suivre aucun ordre. Pour être plus court, et par là plus clair, je ne prendrai que les chiffres 1 2 3 4. La généralité n'est pas toujours dans le nombre indéterminé des choses.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3
1	3	4	2
2	4	1	3
3	1	2	4
4	2	3	1
1	4	2	3
2	1	3	4
3	2	4	1
4	3	1	2
1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2
1	3	2	4
2	4	3	1
3	1	4	2
4	2	1	3
1	4	3	2
2	1	4	3
3	2	1	4
4	3	2	1

Avec de l'attention on trouvera d'abord, que les quaternaires verticaux sont composés du cycle 1 2 3 4, commencé à un de ses quatre chiffres et terminé au voisin; 2 3 4 1, 3 4 1 2, 4 1 2 3.

1, la première évolution, est la permutation de 1 2 3 4 à un.
2
3
4
J'en déduis la permutation à deux, en écrivant cette évolution 4 — 1 = 3 fois de haut en bas, et ajoutant à droite les cycles 2 3 4 1, 3 4 1 2, 4 1 2 3.

Pour obtenir la permutation à trois, j'écris l'évolution binaire 4 — 2 = 2 fois de suite, et j'ajoute respectivement à droite l'un sous l'autre

3 4 1 2 4 1 2 3 2 3 4 1, 4 1 2 3 2 3 4 1 3 4 1 2,

provenant de 2 3 4 1, 3 4 1 2, 4 1 2 3 considéré comme un seul cycle.

On procède analogiquement pour rendre la permutation quaternaire. Il est palpable, que la méthode a lieu pour tant de chiffres ou choses qu'on veut: elle a cela de particulier qu'elle ne demande que la peine de copier.

Nous venons de présenter différentes lois stélégraphique ou verticales: elles peuvent être constantes, variables, à périodes, à cycles, enfin dérivées d'une norme quelconque F_n . Leurs applications sont nombreuses dans les sciences. Les périodes constantes se rencontrent en Chronologie, où les cycles solaire et lunaire, les

indictions romaines, les périodes, juliennes, grégoriennes et autres sont de cette espèce. Le synchronisme de l'histoire, ou l'art de vérifier les dates au moyen du parallélisme des ères, produit des colonnes combinatoires où les rangs respectifs ont cette loi simple; n , $n + r$, $n + s$, etc. Dans une autre occasion je serai plus étendu sur cette matière.

Les rangs obliques sous toute sorte d'angles, et même selon des direction courbes, ne sont pas moins utiles pour parvenir rapidement à certains résultats. Cette considération, en la poussant plus loin, conduit, de l'Analyse Combinatoire à la Géométrie Combinatoire et à la Mécanique Combinatoire, toutes des parties encore en friche de la *Science des Combinaisons*.*)

Dans la seconde Sammlung Analytisch-Combinatorischer Abhandlungen, le Professeur ROTHÉ, jeune géomètre d'un talent décidé**) et d'une haute espérance pour les mathématiques, a numéroté la loi des déplacements. C'est une nouvelle carrière pour l'Analyse Combinatoire, où les applications

*) *Ordinis et concinnitatis vna omnium seruantissima est Ars Combinatoria, et campum aperit observationibus et meditationibus et applicationibus longe lateque vastissimum.* H I N D E N B. Syst. Combin. Praef. p. VI.

**) Cousin dit dans le discours préliminaire de son *Astronomie physique* „Qu' on me permette de remarquer que „les astronomes à qui l'on doit les découvertes les plus importantes s' étaient d'abord distingués dans l'Analyse Mathématique. Nous avons vu plus de vingt ans un de nos plus „célèbres observateurs (De la LANDE) expliquer au Collège „Royal les ouvrages des NEWTON, des EULER, des MAC- „LAURIN, des BERNOULLI, etc. et devenir, pour ainsi „dire, le créateur d'une chaire, destinée à perpétuer en France „le goût des sciences physico-mathématiques.“

ne tarderont pas à se présenter. Le réellement curieux est toujours uni à l'utile, quoiqu'il n'y paraisse pas au premier abord. Pour en donner un exemple avec quelque variation, je choisis la permutation de $abcd$ en indiquant les déplacements à droite par les chiffres positifs 1, 2, 3, et ceux à gauche par les chiffres négatifs α , β , γ ,

$abcd$ 0000

$abdc$ 0011

$acbd$ 0110

$acdb$ 1112

$adb c$ 0211

$adcb$ 0202

$bacd$ 1100

$badc$ 1111

$bcad$ 1120

$bcd a$ 1113

$bdac$ 1221

$bdca$ 1203

$cabd$ 2110

$cadb$ 2112

$cbad$ 2020

$cbda$ 2013

$cdab$ 2222

$cdba$ 2213

$dabc$ 3111

$dacb$ 3102

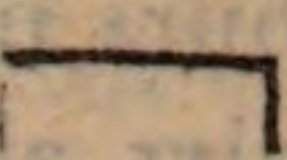
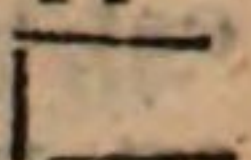
$dbac$ 3021

$dbca$ 3003

$dcab$ 3122

$dcba$ 3113

Cette colonne de
quaternaires à som-
me nulle, a donc
malgré son asym-
métrie apparente,
une loi très simple.

Ce serait ici le lieu d'expliquer d'autres développemens combinatoires : mais faute des cadres  et  je devrais avoir recours à un nouveau système de signes dont je ne veux pas accabler gratuitement le lecteur, puisque je devrais les rétraduire dans mon ouvrage principal. La gêne de l'impression m'a déjà obligé à trop d'expédiens pour être supportablement clair et concis. En fait de caractères on ne saurait être assez économe de l'attention des géomètres : ils préfèrent quelque complication aux abréviations arbitraires, parce, que leur esprit combinateur saisit sans peine les conséquences et que la mémoire s'effarouche des suppositions répétées. Celle-ci, qui perd de son activité à mesure que le jugement prend le dessus, mérite les plus grands égards chez chaque sorte de lecteurs : l'âge adulte ne se familiarise aisément qu'avec les systèmes caractéristiques bien classés et sévèrement distingués dans leurs parties. C'est pourquoi les nombres, dont la suite est la plus frappante pour tous les hommes, seront constamment les meilleurs élémens des grandes combinaisons,*) tels que les développemens analytiques, les nomenclatures techniques, les langues universelles, etc. Les nombres renferment virtuellement l'idée d'ordre et c'est dans ce sens sans doute que Pythagore, le plus grand homme de la haute antiquité, y rapportait tout, et qu'ils sont nommés dans le chapitre neuvième de la sagesse, où Dieu est dit

*) *Operationum combinatoriarum fundamentum et veluti norma* Proposita est in numeros (ex ordine atque etiam per saltus progrediendo) scribendi modo ac ratione, una fere atque unica h. e. praestantissima; cum ipsi numeri, *Permutationum, Combinationum et Variationum* perfectissima et simplicissima omnis generis exempla praebeant — Totum itaque negotium ad simplicissimas numerandi Leges reduximus. HINDENB. Syst. Comb. p. XVI.

avoir formé le monde au moyen des trois sciences mathématiques.

Παυτα μετρω και αριθμω, και σταθμω διαταξας.

Il combina toutes choses par mesure, nombre et poids:

Combina est la traduction la plus exacte, de διαταξας.

Le manque de cadres, que les lignes de l'impression ne rendent pas bien en petites formes, les seules commodes pour le calcul, m'empêche aussi de donner aujourd'hui la relation des principales fonctions combinatoires. J'aurais adopté pour elle la notation de HINDENBURG, parfaite autant que le système alphabétique le comporte: mais j'eusse dû alors expliquer par ordre une nomenclature savante; ce qui aurait changé en traité formel ce rapide aperçu de l'Analyse Combinatoire allemande, composé uniquement en faveur des personnes qui ne la connaissent que peu ou point du tout. En développant la méthode, je me suis surtout attaché à présenter son esprit et je me suis peu arrêté aux détails. Quiconque les aime, poussés aussi loin qu'il est possible, trouvera son fait dans les deux ouvrages suivans:

Grundriss der Combinationslehre, par le Professeur STAHL.

Lehrbuch der Combinatorischen Analysis, par le Professeur WEINGÄRTNER.

Ces ouvrages qui ont paru l'année dernière (1800), se recommandent par leur marche méthodique; on y désirerait plus d'applications; elles paraîtront apparemment dans les secondes parties, que l'un et l'autre auteur fait espérer.

Il y a deux manières distinctes d'introduire à une théorie: la synthétique, qui établit une suite de

principes pour en donner après coup les applications ; c'est celle de mon Développement général : elle est souvent sèche. Afin de délasser en variant, j'ai employé dans ce Polynome Combinatoire la manière analytique, qui se propose un problème, où les principes se présentent comme par hasard. Cette dernière, à beaucoup près la plus amusante, est aussi la plus instructive, en ce qu' elle est une invention continuelle pour le lecteur, dont elle accouche, pour ainsi dire, les idées ; en revanche, les longueurs, et les lacunes deviennent souvent son partage. Mon Traité d' Analyse Fonctionnaire Combinatoire réunira les deux manières et sera d'une étendue convenable. Comme j'aurai pour lui des cadres d'une pièce, la notation leibnitzienne sera plus belle et sans aucune équivoque, outre qu' elle sera, généralement parlant, plus courte. Ce n' est qu' à cette notation à cadres, formée de peu d' elemens uniformement combinés, que j'attache quelque prix : ma présente n' en est qu' un surrogat imparfait.

Si dans cette courte esquisse je n' ai pû qu' effleurer la matière, j' ai dumoins tâché de ne pas mériter le reproche de négligence.

IV.

ANMERKUNGEN

ZU

BÜRMANNS

ESSAI DE CARACTERISTIQUE

COMBINATOIRE

VON

C. F. HINDENBURG:

1) Die vorzüglichsten hieher gehörigen Stellen aus LEIBNITZENS Schriften stehen am Ende der Vorrede meines *Nov. System. Perm. et Comb. p. X—XII.*; welchen ich aus einem Briefe von BÜRMANN an mich, noch folgendes hier beynüge:

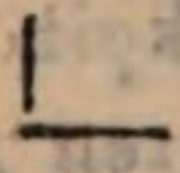
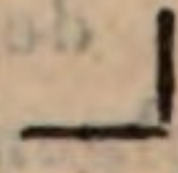
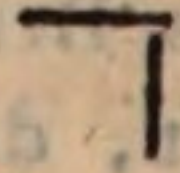
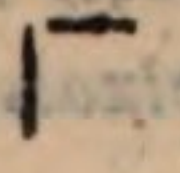
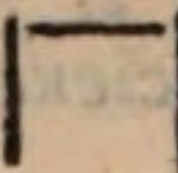
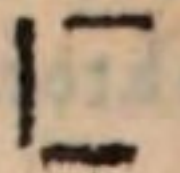
„LEIBNITZENS unermesslicher Plan ist freylich nicht der meinige; aber auch LEIBNITZ konnte jenen nicht ausführen. Ich habe seine Opera wieder aufmerksam durchgesehen, ohne auch nur die geringste Spur von Verwirklichung seiner Gedankenalgeber (*Analysis suprema, ad quam constituendam, wie LEIBNITZ sagt, Alphabeto cogitationum humanarum, et ad inventionem eius Alphabeti, Analyti Axiomatum opus est. H.*) darinn angetroffen zu haben. In LEIBNITZENS philosophischen Schriften, die RASPE gesammelt hat, sagt dieser zwar, daß in den Fragmenten eines von LEIBNITZ angefangenen Werkes *de augmentis scientiarum*, sich Proben der *Characteristicae Combinatoriae* befinden; aber ich glaube, daß sie nur zum Surrogate gehören, welches LEIBNITZ (der in der Folge seine eigentliche Charakteristik wohl selbst für unausführbar halten mochte) an mehreren Orten als Gedankenschrift vorschlägt: jede Sache einstweilen mit einer charakteristischen Zahl zu bezeichnen.“

Das Übrige des Briefes handelt von der Möglichkeit einer Universalschrift, die BÜRMANN in folgendem sechsten Abschnitte seiner Charakteristik; *sur la science des Combinaisons*,

appliquée aux autres sciences par l'Idéographie, vorgetragen, und ihr den Anstrich, zum Theil auch die Einrichtung, analytischer Functionenformen zu geben gewußt hat. Etwas davon habe ich unten (Note 20) beygebracht.

2) Das ist der Aufsatz, der hier (S. 5.) nach der *Table des Matières* folgt, den ich mir von seinem Verfasser zur vorläufigen Bekanntmachung erbeten habe, und der mit dem folgenden 6ten Abschnitte: „Anwendung der Combinationslehre auf eine ideographirte Zeichensprache,“ in Verbindung steht. Man wird diese meisterhafte Darstellung um so mehr mit verdientem Beyfall aufnehmen, da sie eine vortrefliche An- und Übersicht des Ganzen gewährt, und die weitere Ausführung desselben wohl noch einigen Anstand nehmen dürfte; indem BÜRMANN wegen einer ganz neuen von ihm einzuführenden *Notation combinatoire*, beschlossen hat (und bereits thätig daran arbeitet) den Wissenschaften ein beträchtliches Mühe- und Kosten-Opfer zu bringen, und seine Lieblingsidee auszuführen, seine Symbolistik nemlich halb gedruckt (*Première Partie*) halb gravirt (*Seconde Partie*) herauszugeben. Daraus ersieht man zugleich, woher in der *Troisième Partie* die *Section 3^{me}* komme: *Instruction pour graver etc.* Der Verfasser empfiehlt nämlich darinn die Ausübung des Kupferstechens allen Schriftstellern, die neue Ideen und ihre Zeichen, denen die Buchdruckerkunst ihre Hülfe versagt, geschwind in Umlauf bringen wollen.

3) Von diesen *Principes généraux d'Algèbre, ou d'écriture analytique* hat mir der Verfasser bereits eine gut gerathene in Kupfer gestochene Probe zugeschickt. Die Zeichen darinn sind sämmtlich aus einer sehr einfachen Haupt- oder Grundform (ein Rectangel mit seinen beiden Diagonalen, der Linien Durchschnitte punctirt oder unpunctirt) abgeleitet. „Wie man in der Arithmetik (sagt BÜRMANN) Ziffern und „Zusammensetzungen derselben, oder Zahlen, hat, so nehme „ich in der Analysis analytische Ziffern und analy- „tische Zahlen oder Functionen an. Die aus der „Hauptform abgeleiteten *chiffres analytiques* (die sich hier nicht „darstellen lassen) erkennt man an den schiefen Winkeln; „die *nombres analytiques* sind entweder wirkliche oder hypothe- „tische Zusammenfügungen der *chiffres analytiques*. Durch rechte „Winkel werden bezeichnet

	logarithme,		difference réduite,		quotiente réduite,
	fonction,		série,		combinaison.

„Die beiden letztern machen die combinatorischen Functionen aus; und so werden, arithmetische, analytische und combinatorische, Ziffern und Zahlen, oder Functionen, leicht und sicher von einander unterschieden, und können ohne Zweydeutigkeit untereinander gemischt vorkommen. Ein Umstand, der vornehmlich meine neue algebräische Schrift veranlaßt hat.“ Einige Fragmente aus diesen *Principes généraux d'Algèbre* werden in der Folge (S. 22-28) im Auszuge mitgetheilt.

4) „Qui additione datum numerum producendi varietates, et subtractione discerpenti, collegerit, quod utrumque eodem recidit, mihi notus non est. Viam autem colligendi combinationes discerptionum, ostendimus proxime. At ubi plures partes admittuntur, ingens panditur abyssus discerptionum.“ LEIBNITZ *dissert. de Arte Comb. sub fin. Probl. III.* Diese Aufgabe habe ich (*Inf. Dign. §. XXII. p. 73. seq.*) zuerst gelöst. Ohne sie, und einige damit verwandte, in Richtigkeit gebracht zu haben, läßt sich keine bedeutende Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis machen. Vergl. *Nov. Syst. Comb. p. XVI.* und die dortigen Noten.

5) In der Vorrede zu dieser zweyten Sammlung habe ich von BÜRMANNS *Notation combinatoire*, wie ich sie damals kannte, gesprochen. Jetzt ist sie sehr vereinfacht und auf die beyden Zeichen $\sqcap$ und $\sqcup$, mit ihren bestimmten Abzeichen für die nöthigen Modificationen, reducirt worden. Diese geben eine vollständige Sammlung von combinatorisch - involutorischen, auf numerische, lexikographische und andere Anordnungen sich beziehende, Lokal - und Classen - Zeichen, deren Auflösung von combinatorisch - analytischen Operationen abhängig ist. Mehrere meiner Freunde und Correspondenten haben in ihren Briefen an mich sich gewundert, daß ich BÜRMANNS combinatorische Zeichnung, neben der meinigen, und zugleich mit Aufopferung der großen und kleinen deutschen Buchstaben, für Binomial - und Polynomialcoefficienten, in jener Vorrede öffentlich gut geheissen habe. Ich denke über BÜRMANNS und meine Zeichen immer noch so, wie ich mich dort über beyde (S. XIX — XXI der Vorrede) ausführlich erklärt habe. Beyde können und werden, ohne Nachtheil der Sache, mit und neben einander bestehen; und wenn man die (Note 3.) nur beyläufig angeführte Bürmannische Bezeichnung von Ziffern und Zahlen aller Art bedenkt, so müssen, wenn eigentliche Buchstaben dabey überhaupt nicht gebraucht werden,

auch nothwendig die deutschen wegfallen. Erst dann, wenn BÜRMANN seine sämtlichen Zeichen, ihrer Form, Beziehung und Wirkung nach, dem Publikum wird vorgelegt haben, wird solches ein vollgültiges Urtheil über dieselben, in Absicht auf ihren absoluten und relativen Werth, fällen können. Inzwischen kann ich die Güte seiner Zeichnung, der meinigen unbeschadet, im Voraus verbürgen.

6) So haben auch KARSTEN, KLÜGEL, PFAFF und Andere die Sache lange Zeit für *nugas difficiles* gehalten, wie sich Bürmann in einem Briefe an mich ausdrückt, worinn er sich einen Neubekehrten der combinatorischen Analysis nennt; und vielleicht sind KRAMP, KÄSTNER und LAGRANGE (Arch. d. Math. H. VII. S. 350. Note) viele Jahre hindurch die einzigen gewesen, die den Werth der Sache gekannt und gehörig gewürdigt haben. Auch da meine Classen- und Ordnungszeichen und die combinatorisch-involutorische Auflösung derselben, sich schon Beyfall und Achtung erworben hatten, zweifelte PFAFF noch an dem Nutzen meiner Lokalzeichen $p^m \times n$, $\frac{p}{q} \times (n+1)$ u. s. w. die er für unzweckmässig und überflüssig ansah (Erste Samml. c. a. A. S. 124.) bis ihn diese zu den wichtigen Aufschlüssen (das. S. 125—152. und zw. Samml. S. 154—194.) mit Leichtigkeit führten. Der *savant ami*, der BÜRMANN zurecht gewiesen und auf bessere Gedanken gebracht hat, ist vermuthlich Doctor KRAMP gewesen, durch den jener zuerst TÖPFERS polemische Schrift hat kennen lernen (Arch. d. Math. H. VIII. S. 509, 510.). Der Umstand, daß über die Sache in der Folge ein Streit entstand, hat auch in der That, so wie die vielfache Anwendung auf interessante Aufgaben und ihre rein-combinatorische Darstellung, die weitere Aufnahme und Verbreitung derselben sehr befördert. Hoffentlich hat auch meine Abhandlung (Erst. Samml. S. 153—304) vornehmlich aber die darin aufgestellte und mit Beyfall aufgenommene Darstellung und Deduction des polynomischen Lehrsatzes aus dem allgemeinen Producten-Probleme, das Meiste beygetragen, alle noch übrigen Schwierigkeiten und Mißverständnisse gründlich zu heben und gänzlich zu zerstreuen.

7) Diesen Gedanken hat schon vorher ein anderer würdiger Gelehrter gehabt, und ihn, in Verbindung eines Freundes, der die Redaction der Materialien über sich genommen hatte, bereits auszuführen angefangen. Ich würde Beyde um die Wissenschaften sehr verdiente Männer hier nennen, wenn das

Unternehmen, wäre dessen Vollendung auch nicht durch unvorhergesehene Umstände gehindert worden, ihrem wohlverdienenden Ruhme noch etwas zusetzen könnte. Aber freuen wird es jenen würdigen Mann und Meister in seinem Fache, der den Gedanken zuerst gehabt hat, wenn er sehen wird, daß doch noch endlich die Sache in die Hände eines vortrefflichen Analysten gerathen ist, der, so wie Er, die mannigfaltigsten Kenntnisse aller Art besitzt, und, nicht weniger wie Er, gereist, und in England, Deutschland, den Niederlanden, Frankreich und Italien zu Hause ist.

8) Nach EULERS Vorgänge und vielfältigen Beyspielen, auf welche sich auch ARBOGAST in seinem neuesten vortrefflichen Werke: *Calcul des Dérivations* (Pref. p. XXII.) beruft, kann man die deutschen Buchstaben in analytischen Schriften allerdings als zulässig und bekannt ansehen. Ich habe daher den Gebrauch derselben in vorkommenden Fällen, wo vielerley Buchstaben nöthig sind, in Schutz genommen, und zwar in der gerechten und billigen Voraussetzung — *damus hanc veniam petimusque vicissim* — daß, wenn die Ausländer etwas von den Deutschen lernen und gebrauchen wollen, sie sich auch die dafür getroffene Einrichtung gefallen lassen können; um so mehr, da durch Einführung anderer Zeichen statt der deutschen (neben den andern) Buchstaben, ein großer Theil der schon bestehenden Harmonie meiner combinatorischen Formeln aufgehoben werden würde. Werden aber, wie BÜRMAN (Not. 3, 5) thut, alle Buchstaben, überhaupt aufgegeben, so müssen denn doch auch die deutschen nothwendig wegfallen. Daß aber wirklich der Widerwille der Ausländer gegen die deutschen Buchstaben, vornehmlich aus den im Texte ausführlich angegebenen Ursachen so groß ist, als hier behauptet wird, und folglich die Einführung derselben nicht bloß eingebildete, sondern wirkliche, noch jetzt vorhandene, Schwierigkeiten hat; dafür kann ich, zu jenen in der Vorrede der zweyten Sammlung c. a. A. (S. IX. Note) angeführten Belegen, noch folgenden ganz neuen, gewiß nicht unwichtigen, beyfügen, wo ein verdienter Veteran einer berühmten Akademie der Wissenschaften, unterm 28. Jun. 1800. an mich schreibt: *Pour Vos ouvrages combinatoires, ils meritoient d'être traduits dans toutes les langues, et je crois réellement, que Vous rendriez service au public étranger, en supprimant les lettres Gothiques dans Votre notation. J'ai appris l'Allemand avec soin, il y a près des trente ans, j'ai voyagé longtems en Allemagne, et je n'ai jamais pu venir à bout de former lisiblement ces caractères*

Gothiques, ni même les lire dans l'écriture de main. Et je Vous assure que je n'ai pas manqué de bonne volonté.

9) Hier wird (in 1 und 2) das combinatorisch - analytische Geschäft im Allgemeinen kurz und bündig dargestellt. Alles beruht auf der arithmetischen Verbindung der Reihen und ihrer Glieder; die Hauptsache dabey ist die zu bestimmende Norm des allgemeinen Gliedes; diese giebt den tachygraphischen Ausdruck der combinatorischen Regeln; aus diesem muß sich jedes verlangte Glied auf die möglichst einfache Art darstellen lassen; ein kurzer und bündiger Beweis sichert die Zulässigkeit des combinatorischen Verfahrens; einige ausgewählte, schriftlich wiederholte, Anwendungen desselben, verschaffen die nöthige Fertigkeit für die Ausübung. Die oben genannten Regeln beziehen sich auf die combinatorischen Operationen, die man, wie in Zahlen so auch in Buchstaben, in Beziehung auf ihre bestimmten Zahlenwerthe, arithmetisch oder rein-combinatorisch anordnen, und klassenweise oder lexikographisch, nach jedem willkührlichen Gesetze, am besten aber involutorisch, vortragen kann. Anwendungen der lexikographischen und Klassen-Anordnung werden bey der Ausführung von (4 und 5) mehrere gegeben werden.

10) Der *Polynome Combinatoire* hat zwey Haupttheile. Der eine betrifft die Producte, der andere die Potenzen der Reihen (*Polynome Produit* und *Polynome Puissance*). Jener (das Polynomische Productenproblem) ist allgemeiner, dieser (der Polynomische Lehrsatz) zeigt einen sehr ausgebreiteten Nutzen für die Anwendung auch auf andere Sätze (z. B. den Taylorischen Lehrsatz auf das Polynomium bezogen) die ihn als Elementarsatz, voraussetzen. Den natürlichsten Übergang von jenem auf diesen, und wie das auf combinatorischen Wegen mit größter Leichtigkeit geschieht, habe ich (Erste Samml. c. a. A. S. 229, 230. No. 123 — 125.) gezeigt. Der (im Texte No. 3.) angeführte Lobspruch Professor KLÜGELS, betrifft diesen letzten Satz. Eine ausführliche Bearbeitung des *Polynome Combinatoire*, nebst wichtigen und interessanten Anwendungen desselben, hat mir BÜRMANN in seinen Zeichen vorgetragen, bereits vorlängst auf meine Bitte fürs Archiv zugesendet. Die Ausführung aber dieser Zeichen im Drucke fand Schwierigkeit, und hinderte daher die Publication dieses lehrreichen Aufsatzes, der aber durch die nachherige Vereinfachung der Zeichen nur noch mehr gewonnen hat.

11) Ein ausführliches chronologisch geordnetes Verzeichniss aller hieher gehörigen Schriften findet man in Professor WEINGÄRTNER's Lehrbuche der combinatorischen Analysis, gleich nach der lehrreichen Vorrede zum ersten Bande (Seite XLIII — XLVIII.) in 26 Numern aufgeführt. Als Ergänzung sind darinn noch folgende Schriften theils einzuschalten, theils beyzufügen:

27. CHR. KRAMP *de Aequationum primi ordinis solutione generali*. Erfordiae, 1798.

28. MURHARDT combinatorische Behandlung der Kreisbögen und trigonom. Functionen; in der Götting. Societät vorgelesen.

29. *De reticulis cryptographicis*. Auct. MAUR. DE PRASSE. Lipsiae, 1798.

30. I. C. WEINGÄRTNER's Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Professor HINDENBURG's ausgearbeitet. Erster Theil, Leipzig, bey Fleischer 1800. Zweyter Theil 1801.

31. C. D. M. STAHL's Einleitung in das Studium der Combinationslehre, Jena und Leipzig, 1801.

32. E. F. RETTBERG, die Gesetze der nach ihrer Grösse geordneten Brüche, mittelst der combinatorischen Analysis aufgesucht. Hannover, 1801.

33. *Du Calcul des Dérivations*, par L. F. A. ARBOGAST. Strasbourg chez Levrault. 1800.

(Dieses schätzbare Werk, eine erweiterte Anwendung des Differenzialcalculus, ist wegen einiger Berührungspuncte, die es mit der combinatorischen Analysis gemein hat, hier mit angegeben.)

34. Mein Programm als dam. Prokanzler der Universität, worinn gezeigt wird: *Functionum Polynomiorum per series adhibito Calculo Derivationum nuperrime invento, ad substitutiones in substitutiones operosas deducere, et in combinatorias tandem, quibus nullo modo carere potest, operationes et involutiones desinere*. Lipsiae, 1801.

12) Eine vergleichende Übersicht und Zusammenstellung beyderley combinatorischer Zeichen, der meinigen und der Bürmannischen, in einer besondern Tafel, ist nützlich und wichtig. BÜRMANN kann dabey auf den Dank einer grossen Menge Leser rechnen, und gerade derjenigen, die, weil sie die Sache schon aus dem Gebrauche meiner Zeichen kennen, am besten im Stande sind, die seinigen geschwind zu übersehen und von ihrem Werthe ein vollgültiges Urtheil zu fällen.

13) Ich will hierüber BÜRMANN'S Grundsätze aus zweyen seiner Briefe mittheilen: —

„Mein Augenmerk bey dem Baue der combinatorischen Zeichen war erstens, die am häufigsten vorkommenden Functionen einfach zu bezeichnen; zweytens, sie so einzurichten, daß die combinatorischen und andern Functionen, unter einander gemischt, allen analytischen Operationen unterworfen werden können, und so combinatorische Entwicklungen, Umkehrungen, Differentiationen und Integrationen aufzustellen. Die Differenzial-Analysis führt geschwind zu Hauptresultaten, welche die combinatorische hernach ausarbeitet und entwickelt. — Die ersten Anfangsgründe sind bey mir kurz und gedrängt, enthalten wenige Kunstwörter und ein Minimum von Erklärungen. Eben so sparsam bin ich mit den Regeln gewesen. Meine Absicht ist, den Leser geschwinder mit den nothwendigen (und nur mit den nothwendigen) Grundsätzen bekannt zu machen, um ihn, durch Abkürzung der Vorlehen, sobald als möglich, mit interessanten Anwendungen zu beschäftigen, die den Nutzen der Regeln zeigen und für die Wissenschaft einnehmen. Das aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut gewählten Beyspiele machen weit schneller, als die verbalen Vorschriften, mit den combinatorischen Regeln und Verfahren vertraut

„*Segnius irritant animos demissa per aures,*

„*Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus —*“

Vortrefflich! um so mehr, da BÜRMANN von der Sache nicht bloß projectmäßig spricht, sondern schon öfters Gelegenheit gehabt hat, die Methode, in seinen Vorlesungen, praktisch zu prüfen und ihren Nutzen zu bewähren. Wer wird sich von einem solchen Lehrer nicht gern und willig unterrichten lassen!

Daß hierbey manche Besonderungen (*détails ou particularités*) dem Scharfsinn und Fleiße des Lesers überlassen bleiben, entschuldigt BÜRMANN mit MONTESQUIEU: *Qui peut tout dire sans un mortel ennui?* Nur Lücken freylich müssen nicht gelassen werden, wie in dem *Esprit de Loix* mehrere vorkommen, die selbst der geübte Denker nicht leicht auszufüllen vermag.

14) Es scheint ins Unbegreifliche zu fallen, wie BÜRMANN zehn Alphabete der deutschen Bezeichnung bloß durch zwey Zeichen und ihre Modification habe ersetzen können. Für diejenigen also, die meine Zeichnung

nicht kennen, will ich hier erinnern, daß bey mir ein ganzes Alphabeth nur für ein Zeichen gilt. So bedeuten z. B. die großen lateinischen senkrecht stehenden Buchstaben, Combinationen; die schiefstehenden, Variationen; die großen deutschen, Binomialcoefficienten; die kleinen, Polynomialcoefficienten; u. s. w. Weil es aber bey den Combinationen und Variationen, mehrere Klassen; für einen und denselben Exponenten, mehrere Binomialcoefficienten; für die Buchstabenproducte, nach Menge und Verschiedenheit der Buchstaben in denselben, mehrere Polynomialcoefficienten giebt; u. s. w. so werden die ersten, zweyten, dritten, . . . dieser Klassen oder Coefficienten, durch die zugehörigen ersten, zweyten, dritten . . . Buchstaben dieser Alphabete, also nach der Folge der Buchstaben, bezeichnet. Die lexicographische Ordnung wird von der numerischen Klassen-Darstellung durch blumichte Buchstaben *A*, *B*, *C* . . . und insbesondere die involutorische Anordnung von andern combinatorischen durch die besondern Buchstaben *J* und *J* unterschieden. Von den beyderley Zeichen Mehreres in meiner Vorrede zu der zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen (S. XI—XIX.). Daß ich schon vorher auf eine der Bürmannischen gleichbedeutende Zeichnung verfallen bin (das. S. XII, XIII und XVII). Die von mir gewählte Zeichnung durch Buchstaben, vereinigt das Minimum der Beschwerlichkeit im Drucke mit dem Maximum der Bequemlichkeit im Gebrauche; und so hat denn auch BÜRMANN meine Symbole für die vollkommensten schlechterdings anerkannt, die sich durch Buchstaben angeben und darstellen lassen. (Das. S. XX.)

15) BÜRMANN urtheilt über die beyderley Zeichen eben so wie ich: „Sie werden, ohne Nachtheil der Sache beyde „mit und nebeneinander bestehen.“ Was beyden zu statuten kommt, habe ich (Erste Samml. c. a. A. S. XIX, XX.) angegeben. Schon längst bekannte, nicht erst zu lernende; durch den täglichen Gebrauch geläufige; bey ihrer vorlängst festgesetzten Ordnung und Folge so gut und harmonisch zu benutzende; mit bestimmten Namen bereits versehene Zeichen; die sich bequem lesen und schreiben lassen — dergleichen die Buchstaben sind — werden immerfort Freunde und Anhänger finden, und da, wo sie bereits im Gange sind, gewiß fortdauern. Inzwischen kann es nicht fehlen, daß BÜRMANN's in

ihrer Form so einfache und sich auszeichnende, der Bedeutung nach faßliche und in der Anwendung leichte Zeichen, nicht bloß bey Ausländern (vornehmlich solchen, denen die deutschen Buchstaben fremd, also beschwerlich zu lesen und noch mehr zu schreiben, sind) sondern auch selbst in Deutschland verdienten Beyfall finden, und den Geschmack an der combinatorischen Analysis sehr werden ausbreiten helfen; wozu die häufigen Anwendungen, die BÜRMANN von seinen Zeichen auf wichtige und interessante Aufgaben gemacht hat, nicht wenig beytragen werden.

16) Ich billige es sehr, daß BÜRMANN die von LEIBNITZ und BERNOULLI gebrauchten so zahlreichen Kunstwörter unbenutzt vorbeygegangen ist, zumal da die wenigsten auf das sich beziehen, was hier die Hauptsache ausmacht: wirkliche Darstellung der Verbindungen gegebener Dinge. Ich habe einige dieser technischen Benennungen (*Nov. Syst. Perm. et Comb. p. IV—VI. Sect. a*) erklärt, aber wenig oder gar keinen Gebrauch in der Folge davon gemacht; die beybehaltenen jedoch genau in dem Sinne gebraucht, den ihnen ihre Urheber gegeben hatten. Dagegen kommen einige von mir geformte, desto häufiger in meinen und Anderer combinatorischen Schriften vor; und ich habe um so weniger Bedenken getragen, sie aufzuführen, da sie, durch die Umstände der Sache gleichsam von selbst herbeygeführt wurden; auch passende und Hauptbegriffe bezeichnende Kunstwörter vornehmlich geschickt sind, sich kurz und präcis auszudrücken. Ich will hier die wichtigsten anführen und neben einander stellen:

„Combinatorische Elemente und ihre Zahlenwerthe; Combinatorische Operationen; Zeiger; Complexion; Klasse; Ordnung; Summen - und Distanzexponent; gut geordnete Complexionen, Ordnungen und Klassen, mit und ohne Wiederholung, an sich und zu bestimmten Summen; Lokalzeichen und ihre combinatorischen Werthe; verbundene, Scalen für jene und Zeiger für diese; arithmetisch - und rein - combinatorische, recurrirende und involutorische Form; arithmographische, lexikographische und stelegraphische *) Involution und Evolution; u. s. w.“

*) Säulenförmig (in mehrern verticalen Reihen nebeneinander, in die Tiefe [*Arch. der Mathem. H. I. S. 15.*]) geschriebene combinatorische Anordnung oder Involution. Man könnte auch stylographisch (von *στυλος*, *columna*) schreiben. Ich ziehe aber stelegraphisch vor. Denn einmal

17) Daher läßt sich jede Zahl jedes Systems von einer unbestimmten Anzahl Grundzeichen oder Ziffern, allgemein durch die Reihe

$$--- dx^3 + cx^2 + bx^1 + a + \beta x^{-1} + \gamma x^{-2} + \delta x^{-3} ---$$

darstellen. Für das dekadische System ist bekanntermaßen $x = 10$, und die Coefficienten von x drücken jeder eine der zehn Zahlziffern 0, 1, 2 --- 9 aus. Für ein System von n Ziffern oder Zahlzeichen wäre $x = n$, u. s. w. Man vergleiche meine Auflösung für *log. nat.* ($1 + \alpha z + \beta z^2 + \dots$) und die dortige Bemerkung (*Infin. Dign.* p. 109, 110.). Noch mehr; die erste und einfachste Aufgabe der Arithmetik: „Aus den gegebenen Ziffern eines Zahlensystems, alle Zahlen nach der Ordnung; oder: für jede gegebene Zahl, die nächstfolgende zu schreiben“ ist eine combinatorische, und in so fern in der Arithmetik nur ein Lehrsatz (*Lemma*) aus einer andern, vor aller Arithmetik vorhergehenden Wissenschaft, der Combinationslehre. Und eben diese Betrachtung ist es, die mich auf das Hauptmoment in der combinatorischen Analysis, auf die Involutionsen aller Art leitete (*Arch. der Math.* H. I. S. 17—22.) BÜRMANNS bemerkt sehr wahr, die ersten und einfachsten Regeln der Arithmetik seyen nichts anders als eine Numeration unter verschiedenen Ansichten betrachtet; die arithmetischen Operationen sind nämlich blos bedingte combinatorische, wo man den absoluten und relativen Werth der Ziffern für die Zahlen, und dieser Zahlen Beziehung und Wirkung auf einander in Betrachtung zieht.

18) Die Analysis und Algebra hat man nicht immer genau und bestimmt genug von einander unterschieden. BÜRMANNS sagt in einem seiner Briefe, wo er von der Analysis eben dieselbe Erklärung giebt, wie hier im Texte: „*on ne calcule que des rapports, et ceux-ci ne sont que les nombres vulgaires modifiés arbitrairement; les chiffres généraux a, b, c, etc. ne sauraient représenter autre chose.*“ NEWTON a donc très bien défini l'Analyse: *Arithmétique universelle.* J'appelle avec BÉZOUT, *Algèbre*, la no-

wird *stele* oder *stela* beym VITRUV überhaupt für Säule gebraucht; dann heißt *στήλη* insbesondere jede Säule, in Rücksicht einer darauf befindlichen nachrichtlichen Aufschrift; und so kann es eine Gränzsäule, Friedenssäule, Bundessäule, Grabsäule (einen Leichenstein) und, nach dem Gebrauch unserer Zeiten, eine Postsäule, einen Wegweiser etc. bedeuten. Und was sind denn die verticalen Buchstaben- oder Zahlencolonne anders, als Säulen mit Aufschriften? — Wegweiser für die Involutionsen?

„tation tachygraphique, qui est à l'Analyse ce que les notes de la
„Musique sont à la composition.“

„Deux expressions du même nombre, ou deux fonctions de même
„valeur, prennent le nom d'équation, dès qu'un des éléments est à de-
„terminer. Si plusieurs le sont, l'équation sera susceptible d'autant
„de formes, qu'on voudra, puisqu'au moins un des éléments demeurera
„arbitraire. C'est sur ces équations qu'opère le calcul des différences
„de tout genre; calcul, qui a l'évaluation des fonctions, pour objet, et
„pour ressource dans les cas difficiles, le développement en for-
„mes plus commodes.“

BÜRMANNS setzt also das Geschäft der Analysis in die Auf-
findung und Bestimmung der Norm der technischen
Operationen für die zu suchenden Größen; die Norm selbst
aber, sowohl dem Ausdrucke als vornehmlich der Auflösung
nach, gehört der Algebra zu. Dieser Unterschied kommt mit
dem, wie ihn Professor KLÜGEL (Erste Samml. c. a. A. S. 48,
49) festsetzt, im Wesentlichen überein. Zu den vorlängst be-
kannten, sehr mannichfaltig verschiedenen Normen oder For-
men der Größen, ist nun neuerlich die combinatorische
hinzugekommen, und in die Analysis von mir eingeführt wor-
den. Die Tachygraphie combinatoire, wie sie BÜRMANNS nennt,
zeigt sich am wirksamsten in den combinatorischen In-
volutionen, dieser ganz eignen, an Einfachheit und Leich-
tigkeit der Darstellung und Entwicklung alles übertreffenden,
Construction der gesuchten Größen aus ihren Elementen: wo
man Alles, ohne vorgängige Reduction, sogleich gut geordnet,
findet, wo das Auge, mit Einem Überblicke die gesetzliche
Ökonomie weit schneller auffasst und dem Verstand überlie-
fert, als es der bloß verbale Vortrag nicht zu thun vermag.
Von diesen wichtigen Hilfsmitteln der Analysis, die sich ge-
wöhnlich auf bestimmte Summen beziehen, habe ich in den
(Erste Samml. c. a. A. S. 52 — 54. Note c) angeführten Stellen
ausführlich gehandelt, denen man noch die lexicographischen
und arithmographischen ganz vollendeten Involutionen zu un-
bestimmten Summen (Das. S. 202. und 204.) befügen kann.
Beide geben und verschaffen, wie schon Prof. PFAFF (Arch.
der Math. H. VII. S. 348. Note) bemerkthat, deutlich gezeich-
nete, allgemeine Formeln, die von den bloß in Worten weit-
läufig ausgedrückten Regeln sehr lebhaft abstechen.

„Jede Function (sagt BÜRMANNS in einem Briefe an mich)
„ist ein arithmetischer Satz, nämlich die (meistentheils
„tachygraphische) Vorschrift der arithmetischen Zählarten,
„welche die Function in eine Zahl umsetzen. Function könnte

„also auf deutsch Satz übersetzt werden, und Analysis Satz-
 „kunde, welches mit dem Holländischen *Stellkonst* überein-
 „käme, und Algebra (in BEZOUT's Sinne, nach dem ungelehr-
 „ten Sprachgebrauche: *c'est de l'algèbre pour moi*) würde Satz-
 „bezeichnung heißen müssen.“ BÜRMANNS will jedoch
 diese deutschen Namen keinesweges zum Gebrauche empfehlen.
 Er hat dadurch nur die Bedeutung jener Benennungen in der
 Kürze angeben und nachweisen wollen. Von der Etymologie
 des Worts Algebra und von der Cosa der Cossisten unter an-
 dern auch KÄSTNER, in der Vorerinnerung zur dritten Ausgabe
 seiner Analysis endlicher Grössen.

19) Man kann den nützlichen Gebrauch approximatori-
 scher Formeln und Vorschriften durch mehrere in der Astro-
 nomie gewöhnliche indirecte Verfahren sehr gut rechtfertigen,
 Ich will hier nur der häufigen Anwendungen der *Regle des*
fausses positions gedenken, „qui rend les Méthodes indirects, et leur
 „ôte cet air d'élégance qui plaît tant aux Géometres. Mais comme ces
 „méthodes sont moins compliquées, plus intelligibles, et plus faciles
 „dans la pratique, elles sont d'un très-grand secours dans l'Astrono-
 „mie, et même, lorsqu'elles vont au but par un chemin sûr et abrégé
 „elles sont préférables aux Méthodes directes, qui suppo-
 „sent souvent dans les observations, une précision à laquelle il est im-
 „possible d'atteindre, et qui par là deviennent inutile dans la pratique.“
 (La Caille *Leçons elem. d'Astron. Avertiss. p. X.*) Wer
 sucht wohl die Wurzeln der Gleichungen vom dritten und
 vierten Grade nach CARDAN's und BOMBELLI's Regel, und
 zieht ihnen nicht vielmehr die indirecten Annäherungsverfah-
 ren zum Gebrauche weit vor? Wie viel Formeln hat man
 nicht in der Dioptrik aufgeführt, die alle Empfehlung von Sei-
 ten der geometrischen Genauigkeit haben, die aber so ver-
 wickelt sind, daß man erst von ihrer Schärfe nachlassen muß,
 um sie praktisch brauchbar zu machen; und wieviel hat nicht
 hierder einzige EULER durch Einführung geschmeidigerer und
 approximatorischer Formeln geliestet!

20) Auch von seiner Ideographie, oder der *science des Com-*
binaisons, appliquée aux autres sciences, par l'Idéographie, hat
 BÜRMANNS ausführliche Proben mir zugesendet; davon hier
 in der Kürze nur Folgendes, da sich die Figuren dazu nicht
 mit vorlegen lassen. BÜRMANNS geht von einem *Paradigme gé-*
néral oder *Prototype des grammes* aus, und leitet davon seine *mo-*
nogrammes, dyogrammes, trigrammes - - - polygrammes ab. Auf
 diese folgen einige *Distinctions* und *Arithmogrammes, on lettres-*
mots idéographiques, numériquement classés; und nun *Dérivation* (aux

six places du paradigme); *Inflexion* (*aux mêmes places indistinctement*); *Interponction*; und endlich die *Syngrammes, ou arithmogrammes, plus ou moins modifiés*. Dies sind schon modificirte Phrasen. Wie in der Algebra, stellt hier ein stenographisches Symbol oft die Aussprache mehrerer Zeilen vor. Auch ergiebt sich aus den vorgelegten Beyspielen, daß diese Ideographie zugleich eine wahre Tachygraphie ist, und es noch um so mehr wird, daß (weil BÜRMANN alle seine *grammes simples* an Linien setzt oder anhängt) man, wie für die Noten in der Musik, im Voraus linirte Blätter parat haben kann, die *grammes* darauf zu schreiben. Freylich muß man, um sich diese Zeichen nach ihrer Bedeutung und Zusammensetzung geläufig zu machen, ein ernstliches Studium darauf verwenden, das aber dadurch ungemein erleichtert wird, weil diese Ideographie *combinatorisch - analytisch* ist. Andere *pasigraphische* und *stenographische* Zeichnungen, die ich damit verglichen habe, sind zu gekünstelt, und das größte unmodificirte Wort ist nach BÜRMANN'S Ideographie leichter zu schreiben, als in der *Pasigraphie* nach MEMIEU ein Buchstabe.

„Mit der Ideographie (schreibt mir BÜRMANN) ist es wie „mit der combinatorischen Analysis; sie schreckt nur bis man „damit bekannt ist. Sie ist nicht viel schwerer als die Algebra, „aber gewiß sehr viel leichter als die chinesische Schrift (eine „unvollkommene Ideographie), welche man doch in einigen „Jahren geläufig lesen lernt, wie mich Reisende, die im Lande „waren, versichert haben. Eine gute Ideographie läßt sich „viel geschwinder lesen, als gewöhnliche Schrift z. B. ffXdx dz , „welches Wort wir nie so deutlich darstellen werden. Aber freylich müßte die Ideographie schon so weit als die Algebra seyn. „Dazu ist denn nöthig, daß man die Versuche häuft, und daß „man nicht, wie bisher immer geschehen ist, selbige ihrer Unvollkommenheit wegen gänzlich verwirft.“

21) Proben davon giebt das zunächst folgende *Développement général* (no. II) und das *Polynome combinatoire* (no. III.); ein Auszug aus den ausführlicheren, mir früher zusenderen (10) worinn zugleich die Bürmannische Zeichnung so weit abgeändert worden ist, als nöthig war, um solche durch gewöhnliche Typen im Druck darstellen zu können. Was BÜRMANN weiterhin behauptet, die Differenzial-Analysis von der combinatorischen zu trennen, sey beyden nachtheilig, man müsse sie vielmehr innig mit einander vereinigen und amalgamiren, ist sehr wichtig, und nur eine neue Bekräftigung dessen, was er schon anderwärts (*Arch. d. Math. H. VIII. S. 495.*) geäuß-

sert hat. Der dort, in meiner zweyten Sammlung combinato-
risch - analytischer Abhandlungen, nachzuliefern versprochene
Aufsatz von BÜRMAN, wird, seinem Inhalte nach, aber be-
trächtlich erweitert und vervollkommenet, nun in dessen eignen
Werke an seinem gehörigen Orte erscheinen.

22) Professor ARBOGAST hat in seinem Buche nur ein
einziges Beyspiel dieser Art (no. 440.) beygebracht. Von die-
sem Abschnitt wird es genügen hier blos den Anfang und den
Schluß anzuführen: „Voici un exemple où l'indice n de D est
„une fraction.“ In diesem Beyspiele, wo $n = \frac{1}{2}$, findet AR-
BOGAST nach seinem Ausdrucke $D^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} \cdot D^{-\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}}$, den Viertel-
Kreis, oder

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \dots}$$

also den bekannten Bruch nach WALLIS. Und nun der Schluß:
„Je ne m'étendrai pas d'avantage: je n'ai voulu qu'indiquer l'usage
„qu'on peut faire des dérivées à indice fractionnaire etveiller par là
„l'attention sur les différentielles à indice fractionnaire, sujet, qui a été
„peu cultivé jusqu'à présent.“ (Du Calcul des Dérivations
p. 374.) In demselben Werke (no. 456. p. 388.) hat ARBOGAST
eine doppelte Entwicklung der oben im Texte stehenden
Function $\sum^m y (\Delta x)^m$, wo $y = \phi x$, angegeben und durch
ein Beyspiel erläutert. Von diesen, wie dort bemerkt wird,
stimmt die erste mit der von BÜRMAN dem Institut national de
France (Tom. II. des Mem. de l'inst. hist. p. 16.) vorgelegten Rei-
he überein.

23) BÜRMAN's Verfahren, die Glieder der fortlaufenden
Brüche, wie gemeine Brüche, neben einander, nicht wie ge-
wöhnlich in schiefer Richtung unter einander, zu schreiben, ist
bequem und Raum ersparend. So hat schon DAN. BERNOULLI
die Glieder solcher Brüche $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \dots$ neben einander
gestellt, und Indices genennt, weil sie nachweisen, bis auf wie
weit man den continuirlichen Bruch verfolgen will. (Nov.
Comm. Ac Petr. T. XX. p. 24sq.) BÜRMAN's Bezeichnung gewinnt
noch dadurch, daß nach der Zahl oder dem Buchstaben im
Nenner, noch die Zeichen + oder - der nächstfolgenden Zäh-
ler oder Brüche beygeschrieben werden.

24) Meine combinatorischen Behandlungen der continuir-
lichen oder Folgebrüche stehen (Arch. d. Math. Heft I. S. 47-
K

68: H. II. S. 154-195; H. III. S. 319-336). Im letzten Aufsatze habe ich gezeigt, wie mehrere große Mathematiker (EULER, LAMBERT, DAN. BERNOULLI) der Erfindung der combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen sind, ohne doch im geringsten etwas davon zu ahnden. Dasselbe ist in der Folge auch von DE MOIVRE (Arch. d. Math. H. IV. S. 391) und DE LA GRANGE (Töpf. Comb. Anal. S. 123) erwiesen worden. EULER behauptete, das Gesetz, nach welchem Zähler und Nenner in den successiven Werthen der continuirlichen Brüche, aus den einzelnen Zählern und Nennern ihrer Glieder sich zusammen setzen, sey nicht leicht durchzusehen (H. III. S. 322); und dennoch liegt das Gesetz auf demselben Wege, den er eingeschlagen hatte. Die Weitläufigkeit, in die man durch das gewöhnliche Verfahren geräth, führte DAN. BERNOULLI'N auf eine Abkürzung, die er *praestantissimum compendium* nannte, und die im Grunde nichts anders ist, als EULER'S Regel, nur symbolisch ausgedrückt. Den letzten Schritt, den BERNOULLI noch zu thun hatte, die einzelnen Glieder der Zähler und Nenner für die reducirten Werthe der Brüche, nicht neben, sondern unter einander zu stellen, und so in eine figürliche Anordnung zu bringen, die diese Glieder fast laut von ihm forderten (Das. S. 333, 334); diesen Schritt that BERNOULLI nicht, und verfehlte so die letzte und wichtigste aller Abkürzungen — die combinatorische Involution — die das Gesetz, das EULER suchte, und er (BERNOULLI) auf dem Fusse verfolgte, ohne es erreichen zu können, ganz offen vor Augen legt, und so durch sinnliche Anschauung dem Verstande überliefert. Darauf paßt nun BÜRDMANN'S Äusserung oben im Texte, und er hat große Vorgänger auf diesem Wege. Was die von BÜRDMANN weiter hin angeführten *procédés combinatoires* von LAGRANGE anbetrifft, so findet man solche in verschiedenen Stellen seiner Schriften, mehr oder minder entwickelt (Arch. der Math. H. VII. S. 363 - 369). Die dort (S. 368) nur angegebene nicht ausgeführte Bestimmung des allgemeinen Coëfficienten der unbestimmten Potenz des Polynoms, ist combinatorisch in aller Form.

25) Woher es gekommen, daß JACOB und JOHANN BERNOULLI, daß EULER und andere große Mathematiker, die LEIBNITZ'S Schriften gewiß fleißig gelesen haben, die Vortheile der combinatorischen Analysis, bey so starken und nachdrücklichen, nicht selten ekstatischen Empfehlungen und

Lobsprüchen derselben, selbst nach einer von LEIBNITZ ausführlich aufgestellten Probe — der Auflösung eines sehr verwickelten Problems — dennoch übersehen haben; davon habe ich in der Vorrede zu *Infin. Dign.* p. XVIII, XIX, ingl. *Nov. Syst. Combin.* p. XVI. Note (q) die Ursache angegeben.

26) LEIBNITZ hat von seiner Rechenmaschine selbst eine kurze Beschreibung und Abbildung (*Opp. T. III. No. LXXIV*, p. 413 — 415. *Fig. 85*; *it. p. 27, 28*) gegeben. Späterhin ist die Maschine von Hannover nach Göttingen geschickt wordent (*Ibid. Praef. Lud. Dutens p. IV.*) KÄSTNER hat sie aber nicht, wie DUTENS daselbst sagt, wieder hergestellt; sie befand sich noch im Jahre 1778 ganz ungangbar auf dem Göttingischen Observatorio; wo ich sie selbst gesehen habe. Hahn's, Müllers und Anderer Rechenmaschinen sind gleichfalls, aus eignen ausführlichen Beschreibungen bekannt. Von LAMBERTS Verdiensten um Factoren- und andere, arithmetische, trigonometrische und analytische Tafeln, zeigen seine Beyträge zum Gebrauch der Mathematik im zweyten und dritten Theile, seine Zusätze zu den trigonometrischen und logarithmischen Tafeln, und der 5te Band seines deutschen gelehrten Briefwechsels. Hierher gehört auch meine „Beschreibung — Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen — zu finden, nebst Anwendung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel — Leipzig, 1776.“ Wie durch die darinn getroffene Grundlage für Factoren- und andere Tafeln, so wie durch die Bearbeitung derselben, der combinatorische Geist in mir geweckt und der Sinn dafür geschärft worden sey, ist (*Arch. der Math. H. II. S. 243 — 247*) ausführlich gezeigt worden. Prof. FELKES zugleich unternommene Bearbeitung einer Factorentafel, veranlasste einen Streit zwischen ihm und mir, der sich aber von selbst legte: da sich fand, daß zwar Beyder Bearbeitung der Tafel mechanisch, dennoch aber FELKEES rhabdologische Ausführung derselben von meiner combinatorischen ganz verschiedenen sey, letztere auch einen viel grössern Umfang für die Anwendung auf andere Tafeln zeige, als die erstere. Dies ist LAMBERTS Urtheil im 5ten Bande seines Briefwechsels (S. 194, 195) in welchem seine Correspondenz mit mir und FELKEL enthalten ist.

Die grossen Vortheile, welche die in jener Beschreibung gelehrt combinatorisch-mechanische Bearbeitung der in *Extensio* vorgelegten Zahlen gewähren, sind auch nicht unbenuzt ge-

blieben. Die Folgen davon sind drey grosse ausführliche Tafeln, die bey mir ganz vollendet, im Manuscripte liegen:

1) Eine Factorentafel, in welcher alle Primzahlen und alle einfache Theiler der zusammengesetzten, durch 2, 3, 5, nicht theilbaren Zahlen, von 1 bis Million, ausgesetzt befindlich sind. Das sehr günstige Urtheil, das Herr Director BERNOULLI, der diese Tafeln bey mir in Leipzig schon vor mehreren Jahren ganz vollendet in der Handschrift gesehen hat, darüber fällt (LAMB. Briefw. 5. B. S. 242), gründet sich darauf, daß ich bey dem Vortrage der Zahlen sowohl als ihrer Factoren ein ganz neues Zahlensystem (das Centesimal system) befolgt, und das gebräuchliche Dekadische zugleich so innig damit in Verbindung gesetzt habe, daß man die Zeichen der Zahlen und ihrer Factoren auf der Stelle, und ohne ein Blatt umzuschlagen in gewöhnliche dekadische Ziffern und Zahlen umsetzen kann. Es ist zu bedauern, daß die grossen Kosten des Verlags mehrmalige Hindernisse der Ausführung in den Weg gelegt, und solche bis itz suspendirt haben.

2) Eine Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen der Wurzeln von 1 bis Hunderttausend. Den ersten Entwurf dazu hat Herr von SCHÖNBERG gemacht (LAMB. Briefw. B. 2. S. 309) Die Abkürzung des Vortrags ist, ohne Nachtheil der Deutlichkeit, sehr beträchtlich (Das. B. 5. S. 220).

3) Divisionstafeln, oder Tariffe aller Primzahlen von 1 bis 997. Eigentlich: mechanische Division aus Tariffen der zusammengehörigen, combinatorisch angeordneten, möglichen Dividenden, Quotienten und Reste dieser Zahlen. Von diesen Tariffen (Das. B. 5) an mehreren Orten. Die bequemste Construction derselben (Ebend. S. 207 — 211) Von den fast unglaublichen Wirkungen einer solchen Zusammenstellung (Das. S. 215 und Arch. der Math. H. VII. S. 494 Note.)

Das hier Beygebrachte wird hinreichend seyn, den grossen Nutzen combinatorischer Anordnungen und Verfahren, zu mechanischer Aufsuchung der Zahlen zu bewähren, wodurch sich selbige weit schneller und sichrer finden lassen, als durch keinen der gewöhnlichen abkürzenden Rechnungsvortheile möglich ist.

27) Die *Éliminations des inconnues* gehören grösstentheils zu den bestimmten, theils zu den unbestimmten, theils zu den mehr als bestimmten Aufgaben (*Problèmes déterminés*,

indéterminés, plus que déterminés.) BÜRMANN nennt sie mit Recht *éliminations étendues*; denn von den allgemeinen algebraischen Operationen, die sich combinatorisch erleichtern, oft nur auf diesem Wege darstellen und realisiren lassen, ist wohl keine so weitläufig und schwierig, als diese, zumal je grösser die Anzahl der unbekannten Grössen und Gleichungen, und von je höherm Grade und mehrern Gliedern diese Gleichungen sind. Verschiedene Methoden und daraus abgeleitete Formeln: von NEWTON (*Arithmet. univ.* p. 57 — 64); von EULER (*Mem. de l'Ac. des Sc. à Berltn, année 1745.* p. 243 — 248) *année 1764.* p. 91 — 104; *Introd. in Anal. Inf. L. II.* p. 263 und p. 265 *seq.*); von LAGRANGE. (*Mem. — Berlin, année 1769,* p. 303 — 318) Übrigens ist das Eliminationsproblem eins von denjenigen, wo man schon vorlängst combinatorische Hülfe gesucht hat. So hat z. B. CRAMER (*Analyse des lignes courbes, Appendice, de l'évanouissement des inconnues* p. 656 *seq.*) gezeigt (Das. p. 658) dafs, bey gegebenen einfachen Gleichungen, die Elimination auf den Permutationen der Coefficienten dieser Gleichungen beruhe; auch p. 660 — 676) den wichtigen Fall für zwey Grössen x, y und eben so viel Gleichungen von den Graden m, n , eine (z. B. x) zu eliminiren, behandelt, eine combinatorische Formel dafür angegeben, und beyspielsweise auf die Gleichungen $x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$, und $ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$) angewendet. Eine verbesserte combinatorische Anordnung der ersten Aufgabe von CRAMER habe ich in meiner Vorrede zu RÜDIGERS *Spec. anal. de lin. curv. sec. ord.* und einen strengen combinatorischen Beweis seines Verfahrens hat Prof. ROTHE (zweyte Samml. c. a. Abh. S. 263 ff.) nebst mehreren andern verwandten Untersuchungen, gegeben. Ein hierher gehöriges Hauptbuch, das aber viel weniger bekannt ist, als es zu seyn verdiente, ist die *Théorie générale des Equations algébriques; par M. Bézout. Paris 1779.* Die Bezoutischen Verfahren sind größtentheils (ohne dafs er sie selbst dafür gehalten oder daran gedacht haben mag) combinatorisch, aber in der Ausführung zum Theil sehr weitläufig und ermüdend; wovon ich hier nur seine *Règle générale pour calculer, toute à la fois, ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré* (p. 172 — 187) als Beyspiel anführen will, das man mit der Cramerischen oder meiner Vorschrift (a a. O.) vergleichen kann. Es ist daher sehr zu bedauern, dafs dem Verfasser zu der Zeit (1779) meine combinatorischen Operationen, Involutionsen und Sätze noch nicht bekannt seyn konnten; wo-

durch sein Werk, zum größten Vortheil der Wissenschaft, an Abkürzung und Deutlichkeit viel gewonnen haben würde. Es würde sehr verdienstlich seyn, wenn ein Analyst die Bezoutischen weitläufigen Verfahren, Sätze und Regeln in die ächt-combinatorische Sprache und ihre darstellende Zeichen übersetzen wollte. Ein solches Unternehmen würde, wegen der reichen Ausbeute die es gäbe, den Dank des Publicums nicht verfehlen,

28) Hierher gehören unter andern die stelegraphisch geordneten, von mir sogenannten cyclischen Perioden, und ihr Gebrauch in der Diophantischen oder unbestimmten Analytik (Leipz. Magaz. der Math. Jahrg. 1786. St. 3. S. 281. f.) eine combinatorische Auflösung der von EULER und LAGRANGE schon behandelten Aufgabe: „alle Gleichungen vom ersten Grade, mit zwey oder mehrern unbekannten Grössen, in ganzen Zahlen aufzulösen“. (Arch. der Math. H. VI. S. 215).

Eine der wichtigsten und weit sich erstreckende Anwendung der combinatorischen auf die unbestimmte Analysis, beruht auf der Auflösung der unbestimmten Gleichungen, wie $p + q + r + s + \text{etc.} = m$, oder $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc.} = n$, für gegebene m, n und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ (jede Gleichung einzeln, für sich, oder auch beyde in Verbindung mit einander) in ganzen und bejahten Zahlen, die 0 nicht ausgeschlossen. Die erste Gleichung führt und bezieht sich auf Variationsclassen für den Zeiger $(0, 1, 2 \dots m)$; die zweyte (für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ gewöhnlich $1, 2, 3, 4 \dots$ so, daß $p + 2q + 3r + 4s \dots + \text{etc.} = n$) auf Summen von Combinationsclassen für den Zeiger $(0, 1, 2 \dots n)$; Beyde Gleichungen zusammen, auf eine bestimmte Combinationsklasse, die beyden Gleichungen Genüge thut. Einzelne Beyspiele analytischer Aufgaben, mit Beziehung auf solche Bedingungsgleichungen, haben DE MOIVRE, JACOB BERNOULLI, und LAGRANGE gegeben. Sehr häufig und scharfsinnig findet man sie neuerlich von KRAMP (*Anal. des Réfract. astron.* p. 71 — 81. E. S. c. a. A. S. 102 — 117, und Z. S. c. a. A. S. 341 — 366) bey seinen combinatorischen Integralen oder Aggregaten, gebraucht und in Verbindung mit Zahlentäfelchen angewendet, deren Zahlen als zusammengehörige Werthe der $p, q, r, s \dots$ am leichtesten auf combinatorischen Wegen sich finden lassen, und eben des-

wegen eine combinatorische Auflösung geben. Die Auflösung solcher unbestimmten Gleichungen, auf dem gewöhnlichen Wege, würde in grosse Weitläufigkeit führen (E. S. c. a. A. S. 119, 120). Bey mir kommen dergleichen Bedingungsgleichungen gewöhnlich nicht vor, weil ich dafür sogleich das zugehörige Zeichen der Involution der mehreren oder einzelnen Classen, mit untergeseztem Zeiger setze, und dadurch die Bedingungen jener unbestimmten Gleichungen im Voraus erfülle.

29. HUYGENS, LEIBNITZENS, JAC. und DAN. BERNOULLI's, MOIVRE's, MONMORT's, EULER's, LAGRANGE's, LAPLACE's, CONDORCET's, TETENS und Anderer zahlreiche Schriften, und zum Theil tiefe Forschungen in dem Fache der Wahrscheinlichkeit und deren mannichfaltigste Anwendung auf allerley Gegegenstände der Wissenschaften und Künste, der Gewerbe und des gemeinen Lebens, sind zu bekannt, als daß sie erst hier aufgeführt werden dürften. Hierbey liegt nun gewöhnlich die Anzahl möglicher oder nach gewissen Gesetzen beschränkter Verbindungen oder Versetzungen gegebener Dinge zum Grunde. Es giebt aber eine Wissenschaft, die weit inniger und natürlicher mit der Combinationslehre in Verbindung steht, als keine andere; die ausser der Anzahl jener Verbindungen und Versetzungen der gegebenen Dinge, noch ganz vorzüglich die wirkliche Darstellung derselben zum Zweck hat, und davon den erheblichsten Nutzen zieht — die ANALYSIS. Proben davon haben vorlängst LEIBNITZ, de MOIVRE, BOSCOWICH, CRAMER und BEZOUT gegeben, auch haben insbesondere LEIBNITZ und BOSCOWICH, die Vorzüge der combinatorischen Verfahren laut, und ersterer nicht selten mit unbegrenzten Lobsprüchen, gerühmt. Gleichwohl scheint dies alles für die Wissenschaft verlohren gegangen zu seyn, so lange die ersten und einfachsten Gründe der Sache noch nicht aufgefunden und zu einem System verarbeitet waren; wodurch man erst hinterher die Wichtigkeit jener ersten Versuche und Verfahren gehörig schätzen, und dabey zugleich einsehen lernte, wie solche sich noch verbessern, weiter vervollkommen und ganz vollenden lassen. (E. S. c. a. A. S. 155 — 161).

30) Ein Beyspiel einer ausführlichen combinatorischen Darstellung von BERGMANN, die Zahl und Zusammensetzung der sogenannten zwey - drey - vier - fünf - fachen (aus den zu seiner Zeit allgemein angenommenen fünf einfachen) Erden be-

treffend, zugleich mit Bestimmung der specifischen Verschiedenheit, habe ich (E. S. c. a. A, S. 155 Note) angeführt und nachgewiesen.

31) Das gilt vornehmlich von der, zum Lesen und Schreiben eben so leichten als undurchdringlichen und daher höchst-interessanten, Gitterschrift, wo die Einrichtung der dafür nöthigen Netze oder Gitter (*Chassis*) combinatorischen Gesetzen unterworfen ist, und in den gewöhnlichsten Fällen und für eine gegebene Anzahl von Fächern des Gitters, von der Auflösung einer combinatorischen Variationsaufgabe abhängt, Arch. der Math. H. V. S. 81 — 99 und De PRASSE, *Programma de Reticulis Cryptographicis*. Lipsiae 1798.

Alle Arten von Geheimschreiberey und ihre Entzifferung beruhen auf Verbindung gewisser Zeichen, und auf combinatorischen Versuchen, durch Wahrscheinlichkeiten geleitet, welche die Kenntniss der Sprache, die der Chifferschrift zum Grunde liegt, an die Hand giebt. Nur ist keine andere so regelmässig eingerichtet, und so (obschon nicht absolut) unauflöslich und unlesbar, als die Gitterschrift; und es ist merkwürdig, dass der Urheber einer so bedeutenden Erfindung, nach so vielen Nachforschungen, noch immer verborgen ist. Von andern geheimen Schriften nur noch folgendes, in der Kürze: *Ars diuinandi occulte Scripta* (sagt WALLIS, ein grosser Meister in dieser Kunst zu seiner Zeit, in einem Briefe an LEIBNITZ) *est res non certis regulis coërcenda, propter infinitam varietatem ciphrae ponendi — quae a coniecturis principio positae inchoanda est, quae prout succedere vel non succedere deprehenduntur, vel proseguendae sunt, vel mutandae, donec quid certi constet. Sed tanti laboris est, ut vix sit qui velit edicere* (LEIBN. Opp. T. III. p. 102). Nach LEIBNITZENS mehrmahliger Aufmunterung, WALLIS möchte doch die *Artificia Artis suae Cryptolyticae* mittheilen, da sie *fastigium quoddam subtilitatis simul industriaeque humanae* enthielten (Das. p. 118 auch 120, 129): antwortete WALLIS — *Vnum aut alterum docturus sum quibus sit Ars cryptolytica methodis aggredienda (si saltem Methodus dicenda sit vaga venatio) monstrando, quibus ego passibus indagando soleo procedere — Nec tamen eisdem semper; nam, pro variarum genere, varianda est venatio* (Das. p. 133). Sehr wahr, und zugleich sehr schön gesagt!

B. Première Partie, Section troisième (S. 22 u. ff.)

Nach der oben (S. 3.) aufgeführten *Table des Matières*, *Première Partie* sollte dieser lehrreiche Aufsatz ein fragmentarischer Auszug aus der dortigen 3ten Section, jenem so eben hier abgedruckten aus der 5ten, voranstehen. Da ich aber um dessen Mittheilung erst späterhin beym Verfasser nachgesucht hatte, so erhielt ich ihn, nachdem jener bereits abgesetzt war. Ich liefere ihn also nach, ohne Anmerkungen beyzufügen, deren er nicht bedarf; und es ist gleichgültig, ob man ihn früher als jenen, oder erst nach diesem an dem Orte lesen will, wo man ihn hier findet.

So viel, als erläuternde Nachweisung, zu der so interessanten und gedrängten BÜRMANNSCHEN Übersicht der *Science des Combinaisons* in ihrer Anwendung auf die Mathematik überhaupt und die Analysis insbesondere. Diese letztere ist bey weitem die wichtigste, da sie mir die erste und nächste Veranlassung gegeben hat, die Combinationslehre ganz umzuformen, sie beträchtlich zu erweitern, und ihr durch bestimmte demonstrative Regeln und Vorschriften eine wissenschaftliche Form und Gestalt zu geben.

Eine höchst merkwürdige Anwendung der combinatorischen Analysis auf Reihen und continuirliche Brüche, für von einander ganz unabhängige Functionen, enthält (S. 29 — 50) das BÜRMANNSCHE nervöse und vielumfassende

Développement général

aux fonctions arbitraires,

mit seiner Anwendung auf einige Hauptpuncte der Analysis, wodurch es zugleich mehr Bestimmtheit erhält. Die so kurze als unbeschränkte Theorie der Folgebrüche, bey denen die combinatorischen Auflösung vortheilhaft benutzt worden ist, kann zeigen, daß der Verfasser im ersten Aufsätze (S. 17, 18) nicht zu viel davon versprochen hat, und man darf wohl erwarten, daß das hier Beygebrachte nicht alles Inte-

ressante seyn wird, das über einen so lange und anhaltend verfolgten Gegenstand von ihm ist gefunden worden. Da das *Développement général* (ein ausgehobenes Stück oder Fragment aus dem BÜRMANNISCHEN *Traité du calcul fonctionnaire combinatoire*) blos für Nichtanfänger und Kenner geschrieben ist, bey denen es mehr auf Fülle der Sachen und Gedanken, als auf umständliche Auseinandersetzung ankommt, die der Verfasser, wo und so weit es nöthig, in seinem grössern Werke selbst geben wird: so enthalte ich mich aller erläuternden Anmerkungen und Beyspiele. Nur die LEIBNITZISCHEN Coefficienten wie sie BÜRMANN von ihrem Urheber nennt, und ihren Gebrauch bey den combinatorischen Anordnungen (*Dév. gén.* §. 4, 12, 13) werden einige Bemerkungen nicht überflüssig machen — selbst für geübte Analysten, denen combinatorische Begriffe und Verfahren noch nicht recht geläufig sind.

A) LEIBNITZISCHE Coefficienten und ihre Anwendung (*Dév. gén.* §. 4). BÜRMANN hat sich dieser Coefficienten (wo nemlich Zahlen statt der Buchstaben gesetzt werden) mit grossem Vortheil bedient, und so vermittelt der einfachsten Lokalzeichen (wie ich sie nenne) die gesuchte Entwicklung der Functionen ungemein erleichtert. Der *locus classicus* für dergleichen Bezeichnung ist LEIBNITZENS *Nova Artis Analyticae promotio specimine indicata; dum Designatione per Numeros assumptis loco Literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit* (LEIBN. *Opp.* T. III. p. 359 et 366, 367). Wer die *Opera* LEIBN. nicht bey der Hand hat, kann diese merkwürdige Stelle in der Vorrede (p. XVII) zu meinen *Infin. Dignitt* nachsehen; wo ich auch (p. XV, XVI) das LEIBNITZISCHE specimen mit aufgeführt habe. Diese Bezeichnung macht die Grundlage zu der LEIBNITZISCHEN *Combinatoria characteristica*, von der dieser grosse Mann zwar oft gesprochen (mehrere Stellen von ihm, über den Nutzen der Combinationslehrer in der Analysis, und für eine allgemeine philosophische Sprache, stehen in meinen *Nov. Syst. Perm. et Comb. Praef.* p. X — XII) aber nichts davon entwickelt aufgestellt hat. Besonders gehört hierher noch die Stelle (*Opp.* T. III. p. 416 und im *Nov. Syst.* p. 35, 5) wo gezeigt wird, wie man die Coefficienten mehrerer Reihen deutlich durch Zahlen unterscheiden kann. Was dort LEIBNITZ beyspielweise für zwey Gleichungen nachgewiesen, das hat BÜRMANN auf zwey Reihen successiver Functionen angewendet, und dabey Functionen der Zähler von denen der Nenner durch zwey neben einander gesetzte

Zahlen oder Ziffern (Die ersten für die Zähler, die zweyten für die Nenner) bezeichnet und unterschieden, so, daß die Unmöglichkeit, sich kürzer und zugleich deutlicher darüber auszudrücken unmittelbar dabey einleuchtet. *)

Noch mehr. Das von BÜRMANNS (Dév. gén. §. 4) angegebene Gesetz für N , das allgemeine n te Glied, ist ganz leicht und einfach. Nur könnte es scheinen, daß die darinn vorkommenden Buchstaben $a, b, c, d \dots$, deren Werthe nachher einzeln angegeben, und durch eine in die Augen fallende Recurrenz bestimmt werden, eben deswegen zu Weitläufigkeiten führten. Aber diese Recurrenz muß, wie auch BÜRMANNS erinnert, mit der in der Analysis sonst gewöhnlichen, oft so lästigen, nicht verwechselt werden. Sie ist combinatorischer Art (Zw. S. c. a. A, S. 34 und S. 48 — 50) und läßt sich involutorisch ausführen. Es wird nicht überflüssig seyn, wie das geschehen könne, hier in der Kürze nachzuweisen. Zu dieser Absicht will ich

I. In dem BÜRMANNSCHEN Ausdrucke für N , statt der dortigen Buchstaben $a, b, c, d \dots$ (nach dem von mir im Archive der Mathem. Heft I. S. 32 — 35 aufgeführten Verfahren) die Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$ gebrauchen und so ist (Dév. gén. a. a. O.)

$$N = 1.0n + \mathcal{A}.0(n-1) + \mathcal{B}.0(n-2) + \text{etc.} + \mathcal{N}.01$$

Die $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$ bezeichnen hier zweyerley; 1) Die Ordnung in der Folge (in II, IV und V) vorkommenden involutorischen Winkel, und 2) den Inhalt derselben, wie er in den Winkeln eingeschrieben steht; in welchen Falle meine $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$ mit den BÜRMANNSCHEN $a, b, c, d \dots$ vollkommen übereinstimmen.

Die grossen deutschen Buchstaben, in Beziehung auf die gehörigen Winkel, sind demnach hier eine Art Lokalzeichen, welche andeuten, wo man das was man sucht zu finden hat. Es wird hier *Continens pro Re contenta* genannt. Dieser In-

*) Eine andere Anwendung dieser bey mehreren Reihen so bequemen LEIBNITZISCHEN Beziehung auf das Eliminationsproblem, hat Prof. ROTHE (Zw. S. a. c. A. S. 282 u. f.) gemacht und vielfachen Nutzen daraus gezogen.

halt giebt die combinatorische Anordnung mit der größten Leichtigkeit, weil bey Construction der Evolutionen (in IV und V) die Winkel sämtlich gefüllt werden.

II. Die regelmässig fortschreitenden Factoren: $0n, 0(n-1), 0(n-2), \dots, 02, 01$ in dem obigen (I) Werthe von N haben keine Schwierigkeit. Den Inhalt der Coefficienten $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D} \dots$ giebt die BÜRMANNISCHE Relation für die $a, b, c, d \dots$ (Dév. gén. §. 4) und so findet man (in den dortigen Gleichungen für $a, b, c, d \dots$ statt des Zeichens $-$, vor der Hand überall das Zeichen $+$ gesetzt) den Inhalt oder die Werthe von

$$\mathcal{A} = \frac{(n-1)n}{1}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\mathcal{A} \cdot (n-2)(n-1) + 1 \cdot (n-2)n}{1}$$

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{B} \cdot (n-3)(n-2) + \mathcal{A} \cdot (n-3)(n-1) + 1 \cdot (n-3)n}{1}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{C} \cdot (n-4)(n-3) + \mathcal{B} \cdot (n-4)(n-2) + \mathcal{A} \cdot (n-4)(n-1) + 1 \cdot (n-4)n}{1}$$

u. s. w. f.

III. Aus dem Werthe für N in (I) findet man ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots$ nach und nach gesetzt) die einzelnen $A, B, C, D, E, F \dots$ (Dév. gén. §. 4) nach der Ordnung:

$$A = 01$$

$$B = 02 + \mathcal{A}.01$$

$$C = 03 + \mathcal{A}.02 + \mathcal{B}.01$$

$$D = 04 + \mathcal{A}.03 + \mathcal{B}.02 + \mathcal{C}.01$$

$$E = 05 + \mathcal{A}.04 + \mathcal{B}.03 + \mathcal{C}.02 + \mathcal{D}.01$$

$$F = 06 + \mathcal{A}.05 + \mathcal{B}.04 + \mathcal{C}.03 + \mathcal{D}.02 + \mathcal{E}.01$$

etc.

etc.

etc.

etc.

wo die Werthe für $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$. . . aus (II) sich ergeben wenn man auch dort $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. . . successive setzt.

IV. Aus (II) kan man nun sogleich, worauf hier alles ankommt, für N folgende allgemeine Involution mit Winkeln $\mathcal{A}\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\mathcal{B}$, $\mathcal{C}\mathcal{C}$, etc. und ihren Füllungen (wie Arch. H. I. S. 35) anordnen:

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
$\mathcal{A}$	$\frac{n-1}{n} (n-2) n-1$	$(n-3) (n-2)$	$(n-4) (n-3)$	
$\mathcal{B}$	$\frac{1^\circ \cdot (n-2) n}{(n-1) n}$	$(n-3) (n-2)$	$(n-4) (n-3)$	
		$(n-3) (n-1)$	$(n-4) (n-3)$	
$\mathcal{C}$	$\frac{1^\circ \cdot (n-3) n}{(n-1) n}$	$(n-2) (n-1)$	$(n-4) (n-3)$	s.
		$1^\circ \cdot (n-2) n$	$(n-4) (n-2)$	w.
		$(n-1) n$	$(n-4) (n-1)$	
$\mathcal{D}$		$1^\circ \cdot (n-4) n$		f.
	u.	s.	w.	f.

Die 1° in den letzten Gliedern der Winkel (hier und in II) ist kein Lokalzeichen, sondern die Zahl 1, und kann also als Factor weggelassen werden; wie auch in der Folge (in V...) geschehen ist.

V. Die allgemeine Involution (in IV) läuft wegen der $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$. . . etwas in die Breite aus. Für bestimmte Werthe von n z. B. für $n = 6$, oder für den sechsten Buchstaben F , fällt alles zusammen:

	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$
$\mathcal{A}$	56	45	34	23	12
$\mathcal{B}$		64	34	23	12
		56	35	23	12
$\mathcal{C}$			36	23	12
			56	45	24
				46	24
				56	25
$\mathcal{D}$				26	12
				56	45
				45	34
				56	35
				36	13
				56	45
				45	14
				56	15
$\mathcal{E}$					16

Nach (II) ist nämlich $\mathcal{A} = (n-1)n$, für das n te Glied N . Für das 6te, F , wäre also ($n = 6$ gesetzt) $\mathcal{A} = 56$, der Anfang der Involution für die Coefficienten dieses Gliedes; woraus man die erste Complexion 56. 45. 34. 23. 12, und alle übrigen, wie die Winkel nachweisen, ohne Schwierigkeit ableitet (II, IV)

VI. Diese Involution gilt für alle Glieder oder Theile von F , wenn man nach einander, was

in den Winkeln $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ steht

mit den Factoren 05, 04, 03, 02, 01 multiplicirt, und 06 als Anfangsglied voransetzt:

VII. Die Glieder der Werthe von $U, V, C, D \dots$ haben nicht durchgängig das Zeichen $+$ wie man (in II) vor der Hand angenommen hatte. Wegen der Zeichen ist also zu merken, daß jedem Producte in den Winkeln, das aus einer geraden Anzahl Factoren besteht, das Zeichen $+$, aus einer ungeraden Anzahl aber, das Zeichen $-$ vorzusetzen sey. Und so ist (III, V)

$$\begin{array}{rcl}
 F = 06 - 56 | 05 + 56.45 | 04 - 56.45.34 | 03 + \text{etc.} \\
 \quad \quad \quad - \quad 46 | \quad + \quad 46.34 | \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 56.35 | \\
 \quad \quad \quad \quad \quad - \quad 36 |
 \end{array}$$

Hieraus erhellet zugleich, woher die verschiedenen Zeichen bey den Coefficienten des 9ten Gliedes (*Dév. gén.* §. 4) kommen, und warum BÜRMAN (etwas weiter vorher) in den Werthen der B, C, D, E die Zeichen $+$ und $-$ abwechselnd nur immer für die ersten Complexionen gesetzt hat; weil sich nemlich daraus die für die übrigen, untergesetzten, sogleich übersehen lassen.

Anmerkung. Ich habe schon anderwärts (*Arch. der Mathem.* H. II. S. 160 — 195) den Reichthum und die große Mannichfaltigkeit combinatorischer Gesetze für die Werthe der continuirlichen Brüche angeführt. Das überaus leichte Fortgangsgesetz bey obiger Involution (IV, V), wo Werthe von Werthen abgeleitet werden, ist zum Theil stelegraphisch (S. 140. Note). Ein ganz und durchaus stelegraphisches für dergleichen Brüche hat Prof. ROTHE (a. a. O. S. 181 — 174) angegeben; ein anderes von BÜRMAN (hier S. 123) für die hiesige Involution, ist von diesem ganz verschieden, und dadurch merkwürdig, daß es zeigt, wie anfangs einzelne Factoren, dann Factorengruppen von 2, 4, 18, 6 . . . Factoren hinter einander, sich nach bestimmten Intervallen in den aufeinander folgenden senkrechten (stelegraphisch angeordneten) Columnen wiederholen*)

*) Die stelegraphischen Anordnungen stellen sich zuweilen ganz unerwartet dar. So z. B. Prof. ROTHENS Aufführung der Stellen

Der Reichthum combinatorischer Veränderungen und ihrer Darstellung ist unerschöpflich!

B) Vergleichung der Bürmannischen, und Burckhardtischen Hindenburgischen und Töpferischen Zeichen und ihrer Zusammenstellung bey Auflösung des Problems (*Dév. gén.* §. 13)

Bey nurgedachtem Probleme

$$\text{Sommer} \quad \frac{n'}{n-1, +} \quad \frac{n-1'}{n-2, +} \quad \frac{n-2'}{n-3, +} \quad \cdots \quad \frac{2'}{1, +} \quad \frac{1'}{0}$$

kann man fragen, wie die Bürmannische Auflösung mit den dort (am Ende von §. 13) angeführten Burckhardtischen und Hindenburgischen und der, denselben Zweck mit ihr verfolgenden, Töpferischen, zusammenhänge, und eine auf die andere sich reduciren lasse?

I. Burckhardt's Verfahren, die zusammengehörigen Zähler und Nenner der successiven Brüche zu finden, steht im *Arch. der Mathem.* (H. II. S. 174 — 178) und bezieht sich auf den continuirlichen Bruch

$$\frac{1}{2+} \quad \frac{3}{4+} \quad \frac{5}{6+} \quad \frac{7}{8+} \quad \frac{9}{10+} \quad \frac{11}{12+} \dots$$

wo alle Lokalzeichen der Zähler durch ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . ; alle Lokalzeichen der Nenner durch gerade Zahlen, 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . ausgedrückt werden. Beyder Brüche Vergleichung zeigt also, dafs

Burckh.'s 1 3 5 7 9 . . .

Bürm.'s n' $n-1'$ $n-2'$ $n-3'$ $n-4'$. . .

ingleichen

Burckh.'s 2 4 6 8 10 . . .

Bürm.'s $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$ $n-5$, . . .

mit einander übereinstimmen und für einander gesetzt werden können.

exponenten für Permutationen (*Zw. S. c. a. A. S.* 264) für welche die Cykel in den auf einander folgenden verticalen Columnen von selbst in die Augen fallen.

Beyspiel. Die Burckhardtische Darstellung des Zählers C (a. a. O. S. 177) in die Bürmannische zu verwandeln, und so eine durch die andere zu prüfen.

Aufl. Die höchste in der Burckhardtischen Darstellung C vorkommende Zahl ist 16. Man muß also, um bis auf diese Zahl zu kommen, das Bürmannische $n = 8$ setzen. Es beziehen sich also auf einander

Burckh.'s 1 3 5 7 9 11 13 15

Bürm.'s 8' 7' 6' 5' 4' 3' 2' 1'

ingeleichen

Burckh.'s 2 4 6 8 10 12 14 16

Bürm.'s 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0,

wo man also statt der Burckhardtischen Lokalzeichen im dortigen Zähler C , nur die zugehörigen Bürmannischen setzen darf. Eben so verführe man für den Nenner B (a. a. O. S. 176).

Dieselbe Burckhardtische Darstellung C gilt auch für den Zähler des unmittelbar vorhergehenden Bruchs (den letzten von BÜRMANNS (Dév. gén. §. 13.) dargestellten Numérateur); und so gäbe auch B den zuletzt dort dargestellten Denominateur. Nur müßte man dafür bey BÜRMANNS $n = 7$ (wie vorher $n = 8$) setzen, die letzte verticale Columne in der Burckhardtischen Darstellung C (für den Zähler) wo 16 darinn vorkommt, abschneiden, und nur diejenigen Complexionen linker Hand des Abschneidestrichs (mit Übergehung der übrigen) behalten, von denen 16 ist abgeschnitten worden. Man vergleiche die Darstellung (a. a. O. S. 188). Auf eine ähnliche Art verfährt man mit dem Nenner B , um den Bürmannischen letzten Denominateur daraus abzuleiten. Der Beweis für die Burckhardtische Darstellung für Zähler und Nenner ist im Archiv nicht angegeben; man findet ihn aber in der Burckhardtischen Schrift: *Methodus combinatorio-analytica, evolvendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipsiae 1794.*

Anmerk. 1. In den Burckhardtischen Complexionen kommen ungerade und gerade Lokalzeichen unter einander gemengt vor. Nicht so bey BÜRMANNS, welcher Zahlen mit dem Striche oben, und Zahlen mit dem Striche unten, jede Art von einandergesondert, neben einander stellt. Dieses zu erhalten, darf man nur bey Burckhardt die geraden Zahlen nach der Ordnung gelesen, neben einander, und die ungeraden

Zahlen, gleichfalls nach der Ordnung gelesen, neben einander und hintereinander schreiben.

Anm k. 2. Die so geordneten Complexionen, von unten herauf gelesen, stimmen mit den Bürmannischen, von oben herunter gelesen, vollkommen überein. Man vergleiche die Darstellung (a. a. O. S. 188).

II. HINDENBURGS Verfahren für solche Brüche kommt an mehreren Orten des Archivs vor. Hier will ich unter andern die Darstellung (Heft III. S. 334) von Zähler und Nenner anführen, die sich auf den Bruch (S. 331)

$$\frac{a}{\alpha +} \quad \frac{b}{\beta +} \quad \frac{c}{\gamma +} \quad \frac{d}{\delta +} \quad \frac{e}{\varepsilon +} \dots$$

bezieht, den ich $= z$ setzen, und jeden unbestimmten n ten Werth von ihm $z v n$ (*z value n*) nennen und ausdrücken will. Hier stimmen also

Hindb.'s.	a	b	c	d	e	...
Bürm.'s.	n'	$n-1'$	$n-2'$	$n-3'$	$n-4'$	...

ingeleichen

Hindb.'s.	α	β	γ	δ	ε	...
Bürm.'s.	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	$n-5$	...

mit einander überein.

Beyspiel, Aus $z v 5$, dem 5ten Werthe des Bruches z , nach der Hindenburgischen Darstellung (a. a. O. S. 334) die Bürmannische abzuleiten.

Aufl. Man setze das Bürmannische $n = 5$, so beziehen sich auf einander

H—s.	a	b	c	d	e		α	β	γ	δ	ε
B—s.	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$		4	3	2	1	0

und man findet, die Bürmannischen Zeichen statt der Hindenburgischen in die beyden Involutionen (S. 334) für Zähler und Nenner gesetzt, mit Beobachtung dessen, was in den beyden vorhergehenden Anmerkungen (S. 161, 162) angeführt worden ist, den Bruch:

$$\begin{array}{r}
 3210,5' + 32,51' + 531' \\
 30,52' \\
 10,53' \\
 \hline
 2v5 = 43210, + 432,1' + 4,31' \\
 430,2' \quad 241' \\
 410,3' \quad 0,42' \\
 210,4
 \end{array}$$

wie bey BÜRMANN (*Dév. gén.* §. 13)

Anmerk. 1. Der Umstand, daß, nach BÜRMANN, alle Lokalzeichen einer Art (mit dem Strich oben oder unten) neben einander, und die von der andern Art (mit dem Striche unten oder oben) auch nebeneinander und (wenn in einer Complexion, wie gewöhnlich, beyderley Arten vorkommen) hintereinander gesetzt werden müssen, macht die am Ende (*Dév. gén.* §. 13) gegebenen Regeln dafür etwas weitläufig (*régles longues à énoncer et difficiles à retenir*) welches natürlicher Weise nicht anders seyn kann.

Anmk. 2. Magister TÖPFER hat sich denselben Zweck vorgesetzt: „eine Auflösung zu geben, welche alle Lokalzeichen einer Art neben einander producirt“. Sie ist wegen den dabey angebrachten combinatorischen Verfahren merkwürdig. Hier kann nur soviel davon angeführt werden, als die Vergleichung der Töpferischen Zeichen mit den Bürmannischen erfordert.

III. TÖPFERS Auflösung steht im Archiv der Mathem. (H. II. S. 178 — 182). Es sind dabey drey Fälle unterschieden; der dritte (hierher gehörige) allgemeine Fall, wo die Zähler und Nenner alles seyn können, bezieht sich auf den Bruch (a. a. O. S. 181).

$$z = \frac{\alpha}{a+} \frac{\alpha}{b+} \frac{\beta}{c+} \frac{\gamma}{d+} \frac{\delta}{e+} \frac{\varepsilon}{f+} \dots$$

oder, wenn man die dort im Zeiger angegebenen Lokalzeichen braucht, anf

$$z = \frac{\alpha}{1+} \frac{1}{2+} \frac{2}{3+} \frac{3}{4+} \frac{4}{5+} \frac{5}{6+} \dots$$

wo in den Zählern, α und lauter Cursivzahlen von 1 an nach der Ordnung; in den Nennern, lauter gewöhnlich geradstehende Zahlen von 1 an, als Lokelzeichen vorkommen. Nur der erste Zähler α ist anders gezeichnet, weil er das Besondere hat, als *Factor communis* in der Auflösungsformel für $zv n$ aufzutreten.

Nach dem letzten Bruche stimmen also

Töpfer's: α 1 2 3 4 5 . . .

Bürm's: n' $n-1'$ $n-2'$ $n-3'$ $n-4'$ $n-5'$. . .

ingleichen

Töpfers 1 2 3 4 5 6 . . .

Bürm's $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$, $n-6$, . . .

mit einander überein.

1. Beyspiel. Aus $zv 6$, dem sechsten Werthe des Bruches z nach der Töpferischen Darstellung, die Bürmannsische abzuleiten.

Die Töpferische Auflösung (a. O. S. 182) giebt;

$$\alpha \left(\begin{array}{l} 23456 + 234.5 + 2.35 \\ 236.4 \quad 4.25 \\ 256.3 \quad 6.24 \\ 456.2 \end{array} \right)$$

$zv 6 =$

$$\begin{array}{r} 123456 + 1234.5 + 12.35 + 135 \\ 1236.4 \quad 14.25 \\ 1256.3 \quad 16.24 \\ 1456.2 \quad 34.15 \\ 3456.1 \quad 36.14 \\ 56.13 \end{array}$$

wo ich die Complexionen im Zähler und im Nenner, die bey TÖPFERN in zwey ganzen Colonnen neben einander stehen, so in gebrochenen Colonnen unter einander gesetzt habe, wie es die Ordnung der Bürmannischen Complexionen erfordert

Diese zu finden, darf man nur $n = 6$, und statt

$$T-s: \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \dots$$

$$B-s: \quad 6' \quad 5' \quad 4' \quad 3' \quad 2' \quad 1' \dots$$

ingeleichen, statt

$$T-s: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \dots$$

$$B-s: \quad 5, \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \dots$$

setzen. Man vergleiche den Bürmannischen Bruch für $zv6$ im Schema (S. 46)

2. Beispiel. Aus dem Bruche für $zv6$ nach TÖPFER, den nächst vorhergehenden $zv5$ herzuleiten.

Aufl. In dem obigen Bruche für $zv6$ übergehe man alle Complexionen; darinn 6 nicht vorkommt; bey denen, worinn 6 vorkommt, werfe man die 6 weg) was übrig bleibt, giebt die Complexionen für

$$zv5 = \frac{\left[\begin{array}{l} 2345 + 23.4 + 24 \\ \quad 25.3 \\ \quad 45.2 \end{array} \right]}{12345 + 123.4 + 1.24 \\ \quad 125.3 \quad 3.14 \\ \quad 145.2 \quad 5.13 \\ \quad 345.1}$$

Setzt man hier für

$$T-s \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \parallel \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$B-s \quad 5' \quad 4' \quad 3' \quad 2' \quad 1' \quad \parallel \quad 4, \quad 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0,$$

so kommen die Bürmannischen Complexionen für $zv5$ (wie S. 46)

Diese so leichte Umsetzung eines Werthes in den andern, ohne alle Substitution und Reduction, zeigt schon den grossen Nutzen combinatorischer Anordnungen, der noch mehr einleuchtet, wenn man sieht, daß die Töpferische Darstellung der Zähler und Nenner sich sogar, was man kaum erwartet hätte, auf Involutionen bringen lasse (Arch. der Math. II. II. S. 189)

Obschon TÖPFER und BÜRMANNS sich bey Behandlung der continuirlichen Brüche einerley Zweck vorgesetzt hatten (S. 163) so sind doch die Regeln, die sie für die Anordnung der Complexionen vorschreiben, ganz verschieden. Eben so sind HINDENBURG und BURCKHARDT, in Ansehung der Ableitung folgender Werthe aus den vorhergehenden, von denselben Substitutionen (Arch. d. Math. S. 174) ausgegangen, sind aber gar bald auf von einander ganz verschiedene Wege gerathen. Eine neue Bestätigung der Mannichfaltigkeit combinatorischer Verwickelungen und Gesetze für dieselben Gegenstände!

Möchte das Wenige, was ich auf Veranlassung des vortrefflichen Bürmannischen *Développement général* von combinatorischen Anordnungen und Involutionen, und von ihrer Anwendung auf Summirung der Folgebrüche hier beygebracht habe, diejenigen Analysten, welche diese so wirksamen und vielvermögenden Hilfsmittel und ihren Gebrauch in der Analysis noch nicht genüßlich kennen, vermögen, meine ausführlicheren Abhandlungen darüber im ersten Bande des mathematischen Archivs einzusehen! Die hier vorkommenden Involutionen gehören zu den einfachsten, und lassen sich in sehr mannichfaltige Gestalten umwandeln. Am besten ist es, den Anfang combinatorisch-analytischer Untersuchungen von den continuirlichen Brüchen zu machen, und von da erst auf das allgemeine Productenproblem, den Polynomischen Lehrsatz u. s. w. auf die Evolution anderer Functionen und Sätze fortzugehen. Die gedachten Abhandlungen enthalten eine Menge allgemeinnützlicher Bemerkungen, die nicht bloß auf diese Brüche eingeschränkt sind, und ich glaube, durch mehrere Beyspiele, aus Erfahrung fest davon überzeugt, mit Wahrheit versichern zu dürfen, daß Niemanden das aufmerksame Lesen derselben, und das dadurch veranlaßte Nachdenken darüber, gereuen wird.

V.

DER

DERIVATIONS-CALCUL

UND DIE

COMBINATORISCHE ANALYSIS

I N

BEZIEHUNG AUF EINANDER

V O N

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

ERSTER ABSCHNITT.

*Analytische Derivationen und ihre Verschiedenheit.
 TAYLOR's Theorem, als Grundlage der Theo-
 rie der Functionen und deren Entwicklung in
 Reihen. ARBOGAST's Derivationen und heuri-
 stische Fictionen.*

I. Der Begriff von Derivation ist einer der ausgedehntesten und fruchtbarsten in der Analysis. Man kann zusammengehörige Grössen oder Functionen als von einander abgeleitet betrachten; es sey nun, daß ein zwischen ihnen bestehendes, allen gemeinschaftliches, Gesetz der Ableitung wirklich dabey zum Grunde liegt, oder daß sie, bey aller Unabhängigkeit an sich, gleichwohl durch gewisse Operationen so mit einander verbunden sind, daß es möglich wird,

von einer auf die andere überzugehen, und so eine Grösse oder Function aus der andern zu deriviren. Ich will jene, Derivationen der ersten; diese, Derivationen der zweyten Art nennen. Das Derivationsgesetz, auf welches hierbey alles ankommt, wird sich im ersten Falle aus dem bestimmten Verhalten der Grössen unter einander selbst, im zweyten Falle aus der Art der Verbindung herleiten lassen, welche die Grössen bey ihrer Zusammensetzung befolgen. Vorzüglich wichtig zeigen sich beyderley Derivationen bey Evolutionen der Functionen in Reihen, bey Transformationen der Functionen oder Reihen in gegebene Gestalten, bey Umkehrung und Interpolation der Reihen, bey Summirung der continuirlichen Brüche, u. s. w.

2. LAGRANGE und ARBOGAST haben in dem Fache der analytischen Derivationen viel geleistet. Jener hat die *théorie des fonctions et équations dérivées* zuerst recht ins Licht gestellt, und ein neues sehr fruchtbares *Système d'opérations algébriques* daraus abgeleitet; dieser hat den Begriff von Derivation weiter verfolgt, und einen *Calcul des Dérivations* vornehmlich zum Gebrauch für Derivationen der zweyten Art neuerlich herausgegeben.^{a)}

3. Es sey $f x$ eine Function der variablen Grösse x .

I. Aus der Theorie der Reihen ist bekannt, wenn x in $x + v$ (x und v sind beyde undeterminirte Grössen) also $f x$ in $f(x + v)$ sich verwandelt, dafs

$$f(x + v) = f x + p v + q v^2 + r v^3 + \text{etc.}$$

^{a)} *Du Calcul des Dérivations; par L. F. A. Arbogast. Strasbourg, An VIII (1800).*

oder, daß $f(x+v)$ in einer nach v geordneten Reihe sich darstellen läßt, in welcher $p, q, r \dots$ (die Coefficienten der Potenzen von v) gleichfalls Functionen von x sind.

II. Diese Functionen sind keinesweges von v abhängig, lassen sich aber, jede folgende aus der vorhergehenden, und so sämmtlich aus der ursprünglich gegebenen (primitiven) Function fx deriviren. LAGRANGE^{b)} hat daher, bey der weitem Entwicklung von $f(x+v)$, wo diese Derivationen ausführlich nachgewiesen werden, sehr schicklich

$$f(x+v) = fx + \frac{f'x}{1} v + \frac{f''x}{1.2} v^2 + \frac{f'''x}{1.2.3} v^3 + \text{etc.}$$

gesezt. Nämlich, $f'x$ ist hier die erste derivirte Function von fx , und $f''x$ die erste derivirte von $f'x$, und $f'''x$ von $f''x$, u. s. w.; sämmtliche Functionen aber befolgen ein gemeinschaftliches Derivationsgesetz, das man kennt, sobald man weis, wie $f'x$ aus fx , die erste derivirte Function aus der primitiven, sich ableiten läßt. Diese Bezeichnung ist eben so bequem, als die Folgen solcher Ableitungen wichtig sind.^{c)}

b) *Théorie des fonctions analytiques* p. 14.

c) *La Dérivation successive des fonctions $f'x, f''x, f'''x$ etc. qui se déduisent de la fonction proposée fx — doit être regardée comme une nouvelle branche de l'Analyse, et elle offre ces deux questions générales;*

- 1) *Descendre de la fonction génératrice aux fonctions dérivées.*
- 2) *Remonter de l'une quelconque des fonctions dérivées, à la fonction génératrice; la première est l'objet du Calcul Differential, et la seconde appartient au Calcul Intégral. LACROIX Traité du Calcul différentiel p. 94.*

III. Sehr anschaulich ist dieses Gesetz in folgendem analytischen Ausdrucke enthalten:

$$f(x+v) = f x + \frac{d f x}{1 d x} v + \frac{d^2 f x}{1.2 d x^2} v^2 + \frac{d^3 f x}{1.2.3 d x^3} v^3 + \text{etc.}$$

wo also, für unveränderliche dx , die successiven Differentiale,

$$\frac{d f x}{d x} = f' x; \quad \frac{d f' x}{d x} = f'' x = \frac{d^2 f x}{d x^2}; \quad \frac{d f'' x}{d x} = f''' x$$

$$= \frac{d^3 f x}{d x^3}; \text{ u. s. w. ein leichtes Gesetz für Deriva-}$$

tionen der ersten Art darstellen.

Für $f x = y$; $f(x+v) = Y$, wäre $f(x+v)$ oder

$$Y = y + \frac{d y}{1 d x} v + \frac{d^2 y}{1.2 d x^2} v^2 + \frac{d^3 y}{1.2.3 d x^3} v^3 + \text{etc.}$$

Diese Formeln stellen TAYLOR'S bekanntes Theorem^{d)} dar, in der Form, in welcher es gewöhnlich angegeben wird.

IV. Man kann diese Formel etwas abändern und ihr eine für die Entwicklung der Functionen in Reihen bequemere Einrichtung geben^{e)}. Weil nämlich die veränderliche Grösse x in $f x$, oder y , alle Werthe annehmen, und man für v auch eine veränderliche Grösse setzen darf (*Eul. Inst. Calc. Diff. II. §. 66*), so kann man erst $x = 0$ und danu $v = x$ setzen, und die Function $f(x+v)$ und ihren Werth darnach abändern.

Für $x = 0$ verwandelt sich $f(x+v)$ in

$$f v = (y) + \left(\frac{d y}{d x} \right) \frac{v}{1} + \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right) \frac{v^2}{1.2} + \left(\frac{d^3 y}{d x^3} \right) \frac{v^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

^{d)} Von TAYLOR'S Satze, seinen verschiedenen Formen und Anwendungen, habe ich (*Archiv der Math. H. II. S. 201 — 219*) ausführlich gehandelt.

^{e)} *Arch. der Math. a. a. O. S. 210, 211.*

wo man die (y) , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ u. s. w. so nehmen muß, wie es die Voraussetzung von $x = 0$ erfordert. Man darf nämlich nur

für die klammerrirten (y) , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \dots$

die reducirten Werthe von y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} \dots$

setzen, welche kommen, wenn man in y (der Function von x) und in dem was man daraus durch fortgesetztes Differenziiiren findet, nach geschehener Differentiation; $x = 0$ setzt. Setzt man zuletzt x für v , so erhält man y oder

$$f x = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

wo die Klammern dieselbe Nachweisung geben, wie vorhin.

V. Weil die (y) , $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \dots$

nichts von x enthalten (IV) so kann man dafür auch $A, B, C, D \dots$, folglich $f x$ oder

$$y = A + B x + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

setzen, wobey man, wie eben itzt gezeigt worden, berechtigt ist anzunehmen, daß A durch (y) gegeben sey, und daß B von A , und C von B , und D von C , u. s. w. sämmtlich nach einem und demselben Gesetze deriviren, und Derivationen der ersten Art darstellen.

So setzt auch Professor ARBOGAST^{f)} in der entwickelten Function $F(a + x) = a + b x + \frac{c}{1.2} x^2 + \text{etc.}$

^{f)} Calcul des Dérivations, §. I. no. 1.

die Abhängigkeit der $a, b, c, d \dots$ von $F\alpha, a, b, c \dots$ als bekannt voraus. Da der Satz dem ganzen Gebäude zum Grunde liegt, so wird man die kurze derivative Deduction desselben hier nicht überflüssig finden.

4. Das Theorem (3, V) setzt voraus, daß die Function y , auf die man es anwenden will, in eine Reihe wie $a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$, wo die Exponenten von x in einer arithmetischen Progression fortgehen, sich muß können entwickeln lassen. Da der Umfang solcher Functionen sehr groß ist, so erhellet daraus zugleich die Wichtigkeit des Satzes. Die Entwicklung von $\phi(\alpha + z)$, der Function eines Binomiums, hat also keine Schwierigkeit. Anders verhält es sich, wenn man die Evolution von $\phi(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.})$, der Function einer polynomischen Grösse, versucht; wo die Glieder der Potenzen eines Polynomiums (für welche die bekannte recurrirende Formel [hier, Note g] in unübersehbliche Weitläufigkeiten führt) sich nicht leicht übersehen lassen. Die combinatorische Analysis hat diese Schwierigkeit zuerst gründlich gehoben.

5. Als Beyspiele zu unmittelbarer Vergleichung mögen die Evolutionen der beyden Functionen (Arch. der Math. H. II. S. 211, 212) mit den dortigen beyden Anmerkungen (S. 212 — 214) dienen.

Bey der Entwicklung nämlich von

$$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 + \text{etc.}$$

zeigt sich in den Gliedern der Reihe, ausser dem regelmässigen Fortschreiten der Binomialcoefficienten, auch eine sehr regelmässige Verbindung der Potenzen von a mit denen von x ; jedes folgende Glied ist ein derivatives der ersten Art aus dem nächstvorherge-

henden, wobey das allen gemeinschaftliche Derivationsgesetz ganz offen vor Augen liegt; das auch die bekannte Formel

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1} A \frac{x}{a} + \frac{m-1}{2} B \frac{x}{a} + \frac{m-2}{3} C \frac{x}{a} + \text{etc.}$$

nachweist, wo jeder grosse Buchstabe das nächstvorhergehende ganze Glied bedeutet.

Bey Entwicklung hingegen von

$$(a+bx+cx^2+\text{etc.})^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.}$$

wo $A = a^m$

$$B = {}^m\mathcal{A} a^{m-1} b$$

$$C = {}^m\mathcal{A} a^{m-1} c + {}^m\mathcal{B} a^{m-2} b^2$$

$$D = {}^m\mathcal{A} a^{m-1} d + {}^m\mathcal{B} a^{m-2} \cdot 2bc + {}^m\mathcal{C} a^{m-3} b^3$$

$$E = {}^m\mathcal{A} a^{m-1} e + {}^m\mathcal{B} a^{m-2} (2bd + c^2) + {}^m\mathcal{C} a^{m-3} \cdot 3b^2 c + {}^m\mathcal{D} a^{m-4} \cdot b^4$$

(mehrere Coefficienten, bis mit I, stehen in der ersten Samml. c. a. Abh. S. 70)

Bey diesen Entwicklungen folgen zwar die Binomialcoefficienten ${}^m\mathcal{A}$, ${}^m\mathcal{B}$, ${}^m\mathcal{C}$, ${}^m\mathcal{D}$. . . in den einzelnen A , B , C , D , E . . . wiederum sehr regelmässig auf einander, aber dagegen wächst die Verwicklung der a , b , c , d , e . . . immer mehr und mehr, je weiter man die Function evolvirt. Dabey ist folgendes klar: 1) die a , b , c , d . . . verwickeln sich in den A , B , C , D . . . nur nach und nach; A ist eine Function von a ; B von a , b ; C von a , b , c ; D von a , b , c , d ; u. s. w. bey den folgenden Coefficienten. 2) Von jedem dieser Coefficienten ist das erste Glied bestimmt gegeben. Beydes kann man als eine Weisung ansehen, die Zusammensetzung der a , b , c , d . . . (in 1 oder 2) genauer zu erforschen und zu sehen, ob und wie, die Coefficienten (in 1) oder die einzelnen Glieder derselben (in 2) als Derivationen der zweiten Art sich

von einander ableiten lassen^{g)}. Diese Untersuchung hat mich, wie bekannt, auf combinatorische Anordnungen geleitet; Prof. ARBOGAST hat sich neuerlich den Weg dazu durch seinen Derivationscalcul gebahnt.

6. Über die Schwierigkeit der Entwicklung von $\varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$ dahin das zweyte Beyspiel (in 5) gehört, hat man schon öfter und vorlängst geklagt, und solche auf mehreren, (in meinen *Infin. Dign.* (§. XIII — XIX) zum Theil angegebenen) Wegen, aber immer nicht befriedigend, zu heben gesucht. Herr Prof. ARBOGAST drückt sich (*Préf. p II*) darüber folgendergestalt aus: „Da der Differenzialcalcul mit so grosser Leichtigkeit die Reihenentwicklung der Functionen von Binomien giebt, so ist es natürlich, eine Methode zu wünschen, nach welcher die Entwicklung mit gleicher Leichtigkeit auf Functionen der Polynomien von unbestimmter Anzahl von Gliedern, sich erstrecken lasse“ — Dies habe ihn, setzt er hinzu, auf ein allgemeines Evolutionsverfahren durch Derivationen geleitet. ARBOGAST ist also, wie man hier sieht, von demselben Bedürfnisse ausgegangen, das auch mich in Thätigkeit

g) Jedoch so, daß die $A, B, C, D \dots$ unmittelbar durch $a, b, c, d \dots$ bestimmt und ausgedrückt werden. Denn sonst stellen die recurrirenden Formen, wie hier in diesem Falle die Werthe von

$$\begin{aligned} A &= a^m; \quad B = \frac{m A b}{a}; \quad C = \frac{(m-1) B b + 2m A c}{2a}; \\ D &= \frac{(m-2) C b + (2m-1) B c + 3m A d}{3a}; \\ E &= \frac{(m-3) D b + (2m-2) C c + (3m-1) B d + 4m A e}{4a} \end{aligned}$$

gesetzt hat.^{h)} Wir haben beyde den Binomialsatz, ich den Newtonischen, ARBOGAST den Taylorischen, zum Grund gelegt; und die Folge wird zeigen, daß wir nicht sowohl in den Mitteln selbst, als in der Art sie aufzufinden und anzuwenden, von einander abweichen. Meine combinatorischen Deductionen und Invo-

etc. (Eul. Instit. Calc. Diff. P. II. s. 202) ebenfalls Derivationen dar, die auch leichte Gesetze befolgen, aber beschwerliche Substitutionen und Reductionen veranlassen; um so mehr, je weiter man bey ihnen vorwärts recurriren muß, um alles in den gegebenen $a, b, c, d \dots$ auszudrücken. Von solchen Derivationen, die man recurrirende nennen könnte, ist hier die Rede nicht. Die Combinationslehre, und so auch der Derivationscalcul, geben Mittel an die Hand, aus einem der beyderley Ausdrücke in den andern überzugehen. Eine vergleichende Darstellung Beyder, für den obigen Fall, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, (Erst. Samml. c. a. A. S. 291) Eine andere Darstellung eines verwandten Falls (Zw. Samml. c. a. A. S. 49) und meine dortigen Bemerkungen (S. 48 — 52) über gemeine oder gewöhnliche und combinatorisch-involutorische Recurrenzen. Häufige Beyspiele eines solchen Übergangs aus den directen independenten Formen in die recurrirenden, bey ARBOGAST (n. 13, 15, 17, 18, 71 etc.)

^{h)} *Propositum erat primo loco, cum vidissem, Theorema Binomiale a Viris doctis excultum esse sic, ut, quod posset ad ulteriorem perfectionem accedere, nihil superesset, propositum, inquam, erat, Theoremati Infinitinomiali, quod pluribus etiamnum premi compereram, difficultatibus, eandem operam nauare; si forte possem rem eo deducere, ut, pro rei nimirum ipsius modo atque natura, pari facilitate queant, ac fit in Binomio, Infinitinomii etiam Dignitatum singula membra exhiberi (Infin. Dign. Praef. p. VII) — In quo mirum in modum me adiuuit, a LEIBNITIO et Jac. BERNOULLIO iam observatus Potestatum Multinomiorum $\sigma\upsilon\mu\beta\omicron\lambda\iota\sigma\mu\delta\omicron\varsigma$ cum verum quotlibet datarum Complexionibus et Variationibus — Terminorum autem quaerendorum reperi pendere inuentionem a Problemate combinatorio, cuius, propter summum in re Combinatoria et Analysisi vsum, paulo vberiore institui tractationem (Ibid p. XI.)*

lutionen sind, wie aus dem ersten Anhang zu dieser Abhandlung mit mehreren erhellen wird, im eigentlichen Sinne und Verstande des Worts — wahre Derivationen, die, wie die Arbogastischen, auf einen bestimmten Anfang (*origine*), von dem sie ausgehen, sich beziehen. Zum Unterschiede kann man die meinigen combinatorische, die Arbogastischen, analytische Derivationen nennen. Ich sage zum Unterschiede, nicht im Gegensatze; denn meine Derivationen sind, wie man finden wird, ebenfalls analytisch.

7. Den Ursprung meiner combinatorischen und involutorischen Anordnungen (die Veranlassung dazu) habe ich (in 5) angegeben. ARBOGAST hat alles auf erweiterte Begriffe von Derivationen gegründet. Ihn haben die Derivationen der ersten Art auf Derivationen der zweyten geleitet, und ihm Veranlassung gegeben, aus dem bekannten Verfahren bey jenen, ein ähnliches für diese herzuleiten, und einen Algorithmus dafür aufzusuchen. Der Erfolg davon ist eine erweiterte Anwendung des Differentialcalculus gewesen. Dies allein kann schon hinreichend seyn, sich einen Begriff von dem Umfange der Methodeⁱ⁾ im Voraus zu machen,

i) Erstreckt hat die Methode ihr Urheber voritz: auf die Entwicklung von Functionen einfacher und zusammengesetzter Polynomien, bey denen nemlich die Glieder nach den Potenzen eines einzigen Buchstabens, oder nach den Potenzen und Producten von zwey oder drey Buchstaben geordnet sind, und die man daher einfache, doppelte, dreyfache Reihen oder Polynomien nennen kann; auf die Substitution der Reihen in Reihen; auf das allgemeine Glied der recurrirenden (einfachen und doppelten) Reihen; auf die allgemeine Umkehrung der Functionen und Reihen: auf den Differenzialcalculus, verwickelte Operationen zu erleichtern, und auf mehrere andere Gegenstände der

die zugleich mit der Theorie der Functionen, von welcher sie einen besondern Zweig ausmacht, in der engsten und innigsten Verbindung steht; ein Umstand, der recht dazu geeignet ist, sie den Analysten empfehlenswerth zu machen.^{k)} Das Werk ist übrigens mit der lichtvollsten Deutlichkeit abgefaßt, und enthält zahlreiche Spuren grosser Belesenheit, wo der Verfasser im Verfolg seines Ganges auf Sätze stößt, die schon von

Theorie der Functionen: auf allgemeine Lehrsätze der directen und umgekehrten Methode der Differenzen, und weitere Anwendung auf Zerlegung in Factoren, Summirung, Transformation, Interpolation der Reihen. Vornehmlich wichtig ist immer die Evolution der Functionen in Reihen. Sie macht gleichsam die Grundlage des ganzen Werks aus; die Entstehung (der Ursprung) und Anwendung der Derivationen zeigt sich hier am deutlichsten; einzelne Sätze davon finden daher durchgängig ihre Anwendung, und kommen in der Folge häufig vor. An ihr kann man auch am besten die wesentliche Verschiedenheit beyder Methoden (der combinatorischen und derivativen) nachweisen; wie die Folge mit mehrern zeigen wird.

^{k)} Der Analyst befindet sich hier, gleich beym Eintritte, auf einem ihm vorlängst bekannten Boden (des Differenziirens) und auf diesem Wege eröffnen sich ihm allmählig, bey weitem Fortschritten, neue An- und Aussichten. Bey einem flüchtigen Überblick scheint es, man habe nur wenige Zeichen ins Gedächtnis zu fassen. Der Grundzeichen sind freylich nur wenige; aber sie werden, durch Striche, Punkte, Commata, Zahlen und Buchstaben, oberwärts und niederwärts zur Seite, so mannichfaltig modificirt, und erhalten dadurch so vielfache Unterschiede, daß man sie wohl für eben so viel einzelne besondere Zeichen ansehen kann. Um so nothwendiger und nützlicher ist ihre Zusammenstellung und die Nachweisung ihrer Bedeutung, die in einer besondern Tafel, gleich am Ende der Vorrede, angegeben worden ist.

LAGRANGE und LAPLACE auf andern, zum Theil ähnlichen, Wegen sind aufgefunden worden. ¹⁾

Die grosse Deutlichkeit des Werks beruhet: auf der sehr faßlichen, zum Theil ausführlichen, Darstellung und Auseinandersetzung der ersten Gründe und der daraus abgeleiteten Vorschriften und Verfahren; auf der sehr zweckmässigen Ordnung und Stellung der Sätze; vornehmlich auf der genau bestimmten Angabe und Abfassung der vorzüglichsten Aufgaben und Lehrsätze [als Exempel will ich hier die in der Folge vorkommende Aufgabe (in 20) anführen] mit Beyfügung der zugehörigen Auflösungen, Beweise und erläuternden Beyspiele; auf den gut gewählten Abschnitten endlich und Rubriken, die als bequeme Ruheplätze und weitere Nachweisungen dienen. Dieser gemischte, synthetisch-analytische Vortrag, ist freylich nicht so kurz als der ganz analytische, hat aber seine eigenen Vorzüge, die wohl erwogen zu werden verdienen, zumal da der Verfasser nicht bloß für vollendete Analysten geschrieben hat.

8. Der Derivationscalcul gründet sich auf die allgemeine Vorstellung, daß man Grössen als von einander abgeleitet betrachten kann. Hierher gehören (und das ist der gewöhnliche Fall) diejenigen Grössen oder Functionen, die eine solche Abhängigkeit von einander haben, daß eine aus der andern, durch ein gleichförmiges Verfahren (wie bey den successiven Differenzialen) sich deriviren läßt. Man kann aber, mit ARBOGAST, den Begriff von Derivation erweitern, und

¹⁾ *En rapprochant plusieurs théories importantes et des solutions fondées sur des principes et des méthodes diverses, j'ai été surtout jaloux, pour mieux faire sentir l'utilité du calcul des dérivations, d'attacher à ce calcul plusieurs des plus elegantes formules dues à la sagacité des grands Geomètres, LAGRANGE et LAPLACE. Calc. des Dér. Préf. p. XI.*

durch eine hevristische Fiction, auf jede willkürliche, von einander ganz unabhängige Grössen $a, b, c, d \dots$ und ihre Zusammensetzung in Functionen, erstrecken, und solche als veränderlich und von einander abhängig (derivirend) ansehen, wenn sich aus der Verbindung, in welche sie durch die sie betreffenden Operationen gebracht worden, ein Weg angeben läßt, auf welchem man von einer Grösse oder Function auf die andere übergehen kann; wobey also, weniger die Grössen selbst, als ihre Operationen, in Betrachtung kommen.^{m)}

Ich werde hier und in der Folge nur einige der wichtigsten Derivationsformeln und ihren Gebrauch bey Entwicklung der Functionen von Polynomen in Reihen aufführen, um solche nachher mit den combinatorischen Evolutionsformeln und ihrer Anwendung zu vergleichen. Die Ableitung und Rechtfertigung jener Formeln (wo selbst die Coefficienten $a, b, c \dots \alpha, \beta, \gamma \dots A, B, C \dots$ der Glieder der Polynomen durch eine doppelte Fiction als veränderlich und von einander derivirend betrachtet werden, selbst dann, wenn sie gänzlich von einander unabhängig sind, [ARB. p. 6, 4 und p. 20, 21] welcher Voraussetzung am Ende durch eine schickliche Substitution Genüge geleistet wird [Ebend. no. 6] muß man im Buche selbst nachsehen, wo man alles deutlich und ausführlich aus einander gesetzt finden wird. Die in der Folge vorkommenden Citate, theils aus der gegenwärtigen Abhandlung, theils aus dem Arbogastischen Werke, kurz und auszeichnend zu unterscheiden, sollen die Zahlen der Abschnit-

^{m)} *Les dérivées que je considère sont moins des dérivées de quantités que de dérivées d'opérations, comme l'Algèbre est moins un calcul de quantités que d'opérations, arithmétiques ou géométriques, à exécuter sur les quantités. Calc. des Dér. Préf. p. I.*

te oder Seiten der erstern, immer in runde (); die Numern und Zahlen der Seiten von leztern hingen, in eckigte [] Klammern eingeschlossen werden. Auch sollen meine häufig angeführten, erste und zweyte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen forthin blos durch Sml. I und Sml. II bezeichnet werden.

10. Der Anfang wird mit dem Satze gemacht

$$F(\alpha + x) = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

wo aus der Theorie der Functionen bekannt ist (3. V) das $a = F\alpha$, das b von a oder $F\alpha$, und c von b , und d von c , u. s. w. nach einem und demselben Gesetze deriviren, so, das wenn man b von a oder $F\alpha$ abzuleiten weis, man auch c von b , und d von c u. s. w. deriviren kann [no. 1]

11. Das Zeichen der Derivation ist der Buchstabe $\mathfrak{D}$, aus dem grössern lateinischen Alphabete der sogenannten Capitälchen. Es ist nöthig die Derivationen und Differentiationen (wofür LEIBNITZ das kleinere d gewählt hat) zu unterscheiden. $\mathfrak{D}$ drückt also zugleich die Verwandtschaft und den Unterschied mit und von d sehr schicklich aus.

12. Zeigt also $\mathfrak{D}$ die Operation an, die man auf $F\alpha$ anwenden muss, um b daraus zu deriviren, so ist klar, das

$$b = \mathfrak{D} F\alpha; c = \mathfrak{D} \mathfrak{D} F\alpha = \mathfrak{D}^2 F\alpha; d = \mathfrak{D}^3 F\alpha; \text{etc.}$$

Man kann also die vorige Reihe (10) auch so ausdrücken:

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{\mathfrak{D} F\alpha}{1} x + \frac{\mathfrak{D}^2 F\alpha}{1.2} x^2 + \frac{\mathfrak{D}^3 F\alpha}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

[no. 2] welche Form mit der des Taylorischen Theorems (3. III) übereinstimmt.

13. Wenn man α als veränderlich betrachtet und differentiirt, so findet man

$$D F \alpha = \frac{d F \alpha}{d \alpha}; D^2 F \alpha = \frac{d^2 F \alpha}{d \alpha^2}, D^3 F \alpha = \frac{d^3 F \alpha}{d \alpha^3}; \text{ etc.}$$

wo $d \alpha$ constant und willkürlich ist. Man kann also $d \alpha = 1$ setzen, und diese Voraussetzung giebt

$$D F \alpha = d F \alpha; D^2 F \alpha = d^2 F \alpha; D^3 F \alpha = d^3 F \alpha; \text{ etc.}$$

und die Regeln der Derivationen sind mit denen der Differentiationen übereinstimmend [3]. Hier bedeuten $D, D^2, D^3, \dots$ dieselben, aber mehrmals und zwar so oft wiederholten Operationen an, als die Exponenten 1, 2, 3 $\dots$ erfordern.

14. Um $F(\alpha + \beta x)$ zu entwickeln, darf man (in 12) statt x nur βx schreiben. Das giebt, wenn man die $\beta^1, \beta^2, \beta^3 \dots$ von den $x^1, x^2, x^3 \dots$ absondert und neben $F \alpha$ setzt:

$$F(\alpha + \beta x) = F \alpha + \frac{D F \alpha \cdot \beta}{1} x + \frac{D^2 F \alpha \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} x^2 + \text{etc.}$$

für $D \alpha = d \alpha = 1$.

Die $\beta^1, \beta^2, \beta^3 \dots$ zugleich mit von den Operationen auf $F \alpha$ abhängig zu machen, nehme man an

$$F(\alpha + \beta x) = F \alpha + \frac{D \cdot F \alpha}{1} x + \frac{D^2 \cdot F \alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \text{etc.}$$

Die Vergleichung beyder Reihen giebt sodann die Werthe der Derivationen mit dem Puncte vor $F \alpha$ oder

$$D \cdot F \alpha = D F \alpha \cdot \beta^1; D^2 \cdot F \alpha = D^2 F \alpha \cdot \beta^2;$$

$$D^3 \cdot F \alpha = D^3 F \alpha \cdot \beta^3; D^4 \cdot F \alpha = D^4 F \alpha \cdot \beta^4;$$

u. s. w. und diese Werthe findet man auch, wenn man auf $D \cdot F \alpha = D \cdot \alpha$ dieselbe Operation, wie auf $F \alpha$, anwendet; und statt $D \cdot \alpha$ die constante β (also $D^2 \cdot \alpha; D^3 \cdot \alpha$

u. s. w. $\equiv 0$) setzt. Dieses, und die Fortsetzung dieses Verfahrens, giebt

$$D. F \alpha \equiv D F \alpha. D. \alpha \equiv D F \alpha. \beta^1$$

$$D^2. F \alpha \equiv D. (D F \alpha. D. \alpha) \equiv D^2 F \alpha (D. \alpha)^2 \equiv D^2 F \alpha. \beta^2$$

$$D^3. F \alpha \equiv D. [D^2 F \alpha. (D. \alpha)^2] \equiv D^3 F \alpha (D. \alpha)^3 \equiv D^3 F \alpha. \beta^3$$

u. s. w. Dies Verfahren ist also von dem in der Differenzialrechnung gewöhnlichen, nur darinn unterschieden, daß hier α variabel und statt $D. \alpha$ der Coefficient gesetzt wird, der in dem Binomium $\alpha + \beta x$ zu x gehört [no. 3, 4]

15. Den Übergang aus den Functionen der Binomien in die der Polynomien anlangend, nehme man von jedem Gliede der Reihe (14) die Function φ ; dies giebt einestheils,

$$\varphi F (\alpha + \beta x) \equiv \varphi (F \alpha + \frac{D. F \alpha}{1} x + \frac{D^2. F \alpha}{1.2} x^2 + \text{etc.}$$

anderentheils, φF statt F gesetzt,

$$\varphi F (\alpha + \beta x) \equiv \varphi F \alpha + \frac{D. \varphi F \alpha}{1} x + \frac{D^2. \varphi F \alpha}{1.2} x^2 + \text{etc.}$$

Nun sey $F \alpha \equiv a$, $D. F \alpha \equiv D. a$, $D^2. F \alpha \equiv D^2. a$, u. s. w. so ist

$$\varphi (a + \frac{D. a}{1} x + \frac{D^2. a}{1.2} x^2 + \frac{D^3. a}{1.2.3} x^3 + \text{etc.})$$

$\equiv$

$$\varphi a + \frac{D. \varphi a}{1} x + \frac{D^2. \varphi a}{1.2} x^2 + \frac{D^3. \varphi a}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

wo also die Entwicklung von $D. \varphi a$, $D^2. \varphi a$, $D^3 \varphi a$, ... zu suchen ist. Da hier, wie man sogleich übersieht, die $D^2. a$, $D^3. a$, $D^4. a$, . . . nicht (wie in 14) gleich Null sind, so sind auch die $D^2. \varphi a$, $D^3. \varphi a$, . . . nicht mehr den $D^2 \varphi a (D. a)^2$, $D^3 \varphi a (D. a)^3$, . . . gleich, sondern man muß ihnen die von den variablen $D. a$, $D^2. a$, $D^3. a$, . . . herrührenden Grössen beifügen; und

so befolgen hier die Zeichen D und d (11) dieselben Regeln [no. 5.].

16. In der Folge kommen häufig, was ich hier im voraus bemerken will, neben den ganz einfachen *dérivées successives*, nämlich

den $D Fa$, $D^2 Fa$, $D^3 Fa$ $D^n Fa$

auch $D.Fa$, $D^2.Fa$, $D^3.Fa$ $D^n.Fa$

oder $D.\varphi a$, $D^2.\varphi a$, $D^3.\varphi a$ $D^n.\varphi a$

vor: wo also Derivationen mit einem Puncte vor dem Functionalzeichen F oder φ , von denen ohne Punct zu unterscheiden sind. In beyden wird a als variabel betrachtet; aber in dem Falle wo kein Punct vor F oder φ steht, ist die *dérivée* der veränderlichen a , d. i. Da , beständig und $\equiv 1$, also $D^2a \equiv D^3a \equiv D^4a \equiv \text{etc.} \equiv 0$; wo hingegen ein Punct steht, ist auch die *dérivée* von a , das ist $D.a$, und so auch $D^2.a$; $D^3.a$; $D^4.a$. . . variabel.

Denselben Unterschied (mit oder ohne Punct) werde ich in der Folge auch bey dem gewöhnlichen Differentialzeichen beobachten, und $d\varphi a$, $d^2\varphi a$, $d^3\varphi a$, . . . für *beständige* da , von $d.\varphi a$, $d^2.\varphi a$, $d^3.\varphi a$. . . wo auch die $d.a$, $d^2.a$, $d^3.a$, . . . variabel sind, unterscheiden.

17. Die Entwicklung der successiven Differenzialen $D\varphi a$, $D^2\varphi a$, $D^3\varphi a$, . . . wo $Da \equiv 1$, also höhere Differenziale von a gar nicht vorkommen, hat keine Schwierigkeit. Aber die Entwicklung für $D.\varphi a$, $D^2.\varphi a$, $D^3.\varphi a$. . . (15) wo $D.a$ und alle höhere Differenziale von a beybehalten werden, führt gar bald zu Weitläufigkeiten.

So ist z. B.

$$D. \varphi a = D \varphi a . D. a$$

$$\begin{aligned} D^2 \varphi a &= D. (D. \varphi a) = D. (D \varphi a . D. a) \\ &= D \varphi a . D. (D. a) + D. (D \varphi a) . D. a \\ &= D \varphi a . D^2. a + D^2 \varphi a (D. a)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^3 \varphi a &= D. (D^2 \varphi a) \\ &= D. [D \varphi a . D^2. a + D^2 \varphi a (D. a)^2] \\ &= D \varphi a . D^3. a + D^2 \varphi a . D. a . D^2. a \\ &= D \varphi a . D^3. a + D^2 \varphi a . D. a D. ^2 a \\ &\quad + D^2 \varphi a . 2 D. a . D^2. a + D^3 \varphi a . (D. a)^3 \\ &= D \varphi a . D^3. a + 3 D^2 \varphi a . D. a . D^2. a + D^3 \varphi a . \\ &\quad (D. a)^3 \end{aligned}$$

Diesen, von ARBOGAST [no. 5] aufgeführten Werthen von $D. \varphi a$, $D^2. \varphi a$, $D^3. \varphi a$, will ich noch den von $D^4. \varphi a$, aber, zu Vermeidung der Weitläufigkeiten, in der letzten reducirten Gestalt, ohne die Zwischenoperationen, hier beifügen:

$$\begin{aligned} D^4. \varphi a &= D \varphi a . D^4. a + D^2 \varphi a [4 D. a . D^3. a + 3 (D^2. a)^2] \\ &\quad + D^3 \varphi a . 6. (D. a)^2 . D^2. a + D^4 \varphi a . (D. a)^4 \end{aligned}$$

Der weitere Fortgang hat keinen Anstoss, wenn man die Weitläufigkeiten nicht rechnen will, welche die mehreren Differenziationen und Reductionen veranlassen, die sich merklich anhäufen, und die Entwicklung der Derivationen für spätere Glieder in der Folge so gut als unmöglich machen.ⁿ⁾ Auf diesem Wege wird

ⁿ⁾ So z. B. kommen auf dem Wege der successiven Differenziation, in dem Werthe von $D^4. \varphi a$ die zu $D^2. \varphi a$ und $D^3 \varphi a$ zugehörigen Factoren (oder höhere Differenziale von a) nicht, wie hier beysammen vor, sondern müssen erst zerstreut zusammengelesen werden. Diese Reduction wird immer häufiger und lästiger, je grösser für die Derivation $D^n. \varphi a$ den Werth von n ist.

das zusammengesetzte $D^n. \phi a$ in die viel einfachern $D\phi a, D^2\phi a, D^3\phi a \dots D^n\phi a$ und in $D.a, D^2.a, D^3.a \dots D^n.a$ mit ihren Potenzen zerlegt. Diese Zerlegungen finden zunächst ihre Anwendung in folgenden beyden Sätzen.

18. Wären in $a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$ die $a, b, c, d \dots$ ganz unabhängige, durch kein Gesetz mit einander verbundene, Grössen, wo also auch b nicht von a , c nicht von b , d nicht von c , u. s. w. deriviren: so liesse sich gleichwohl

$$\phi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$$

$$==$$

$$\phi a + D.\phi a.x + \frac{D^2.\phi a}{1.2}.x^2 + \frac{D^3.\phi a}{1.2.3}.x^3 + \text{etc.}$$

(wie in 15) setzen und so die $a, b, c, d \dots$ als einstweilen von einander derivirend betrachten, wenn man nur hinterher, nachdem die zusammengesetzten Derivationen in einfachere aufgelöst worden (17) $D.a$ mit b , $D^2.a$ mit c , $D^3.a$ mit d , u. s. w. austauscht, oder, nach vollbrachten Derivationen, $D.a = b$, $D.b = c$, $D.c = d$, u. s. w. setzt. Die Entwicklung (17) liefert nämlich das volle Resultat der von einander abhängigen Grössen $D.a, D^2.a, D^3.a$, u. s. w. die man sodann durch jene Austauschung mit $b, c, d \dots$ als ganz unabhängig von einander ansehen und betrachten kann.

Die Function

$$\phi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$$

für jede $a, b, c, d \dots$ in eine Reihe von der Gestalt

$$A + B.x + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} x^n + \text{etc.}$$

zu entwickeln, wäre demnach $A = \phi a$, $B = D.\phi a$, $C = D^2.\phi a \dots A_n = D^n.\phi a$. Bey Formirung der Derivationen würden hier alle $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$ u. s. w. als variable Grössen zugelassen, aber nachher b für $D.a$, c für $D^2.a$, d für $D^3.a$, u. s. w. oder $D.a = b$, $D.b = c$, $D.c = d$, u. s. w. gesetzt [no. 6].

19. Da die Polynomien selten in der Form

$$a + b.x + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc.},$$

oder mit den numerisehen Coefficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$

$\frac{1}{1.2.3.4}$, u. s. w. versehen, vorkommen, sondern viel-

mehr in der gewöhnlichen Gestalt

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

ohne dergleichen Coefficienten, erscheinen: so setzt man auch gewöhnlich

$$\phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \dots + \alpha_n x^n \dots)$$

$$=$$

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots + A_n x^n \dots$$

wo α_n , A_n die n ten Coefficienten nach dem ersten α , A , respective bedeuten.

Hier darf man nur, wie man leicht übersieht die Derivationen, ohne alle Rücksicht auf die numerischen Coef-

ficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ u. s. w. machen, und hernach

β statt $D. \alpha$	B statt $D. A$
1.2γ ; $D^2. \alpha$	$1.2 C$; $D^2. A$
$1.2.3\delta$; $D^3. \alpha$	$1.2.3 D$; $D^3. A$
; ; ;	; ; ;
$1.2. . n\alpha_n$ statt $D^n. \alpha$	$1.2. . nA_n$ statt $D^n. A$

substituieren [no. 7].

ZWEITER ABSCHNITT.

ARBOGAT's erste Auflösung des Hauptproblems zu Entwicklung der Functionen für Polynomien und dessen Derivations-Formel dafür.

20. Aufgabe. Es sey

$$\varphi (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 . . + \alpha_n x^n . . .)$$

eine willkürliche Function eines beliebigen Polynoms, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, . . .$ von einander ganz unabhängige Grössen seyn mögen; man soll diese Function in eine Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 . . . + A_n x^n . . .$$

entwickeln.

Auflösung.

Aus	und (19)
$A = \varphi \alpha$	$D. A = B$
$D. A = D. \varphi \alpha$	$D^2. A = 1.2 C$
$D^2. A = D^2. \varphi \alpha$	$D^3. A = 1.2.3 D$
$D^3. A = D^3. \varphi \alpha$	$D^4. A = 1.2.3.4 E$
• ; ;	• • ;
$D^n. A = D^n. \varphi \alpha$	$D^n. A = 1.2.3. . n A_n$

folgt

$$\begin{array}{ll}
 A = \varphi \alpha & D = \frac{D^3 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 B = \frac{D \cdot \varphi \alpha}{1} & , \quad , \quad , \\
 C = \frac{D^2 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2} & A_n = \frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}
 \end{array}$$

Demnach ist

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots + A_n x^n \dots$$

das ist

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \dots + \alpha_n x^n \dots)$$

==

$$\begin{aligned}
 \varphi \alpha + \frac{D \cdot \varphi \alpha}{1} x + \frac{D^2 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 \dots \\
 + \frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n \dots
 \end{aligned}$$

wo man aber, nach geendeten Derivationen, in den (nach 17) gezogenen Resultaten

$D \cdot \alpha$ mit β und eben so $D \cdot A$ mit B

$D^2 \cdot \alpha$ mit $1 \cdot 2 \gamma$

$D^2 \cdot A$ mit $1 \cdot 2 C$

$D^3 \cdot \alpha$ mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \delta$

$D^3 \cdot A$ mit $1 \cdot 2 \cdot 3 D$

• • •

• • •

$D^n \cdot \alpha$ mit $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \alpha_n$

$D^n \cdot A$ mit $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n A_n$

umtauschen muss. Hier werden nämlich die Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ - als *Dérivées* der variablen α betrachtet und in diese nachher die eben angewiesene Substitution vorgenommen.

21. Wenn man die Werthe der Coefficienten $A, B, C \dots$ hintereinander berechnet, und jedesmal die nöthigen Reductionen macht, so kann man schlechthin [no. 8]

statt $D.\alpha$ $D.\beta$ $D.\gamma$ $D.\delta$. . . $D.\alpha_{n-1}$

setzen 1β 2γ 3δ 4ε . . . $n\alpha_n$

und eben so

statt $D.A$ $D.B$ $D.C$ $D.D$. . . $D.A_{n-1}$. . .

setzen $1B$ $2C$ $3D$ $4E$. . . nA_n

22. Bey Entwicklung der Derivationen (erinnert ARBOGAST) könne man, bey einiger Fertigkeit, anstatt die mit dem Zeichen D behafteten Buchstaben hinzuschreiben, sogleich die für sie zu substituierenden, mit den zugehörigen numerischen Coefficienten versehenen, an jener Stelle setzen. In diesem Falle aber sey es nöthig, die Coefficienten der Potenzen x^0 , x^1 , x^2 , x^3 u. s. w. eine gewisse Ordnung, z. B. die alphabetische befolgen zu lassen, oder sie mit gewissen Zeigern (*indices*) zu versehen; auch sey es vortheilhaft, daß die Zeigerzahlen mit den Exponenten der Potenzen von x übereinkommen, zu welchen die Coefficienten gehören. So folgen in der Reihe $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$ die Coefficienten α , β , γ , δ . . . nach der Ordnung der Buchstaben, wofür man aber auch α_0 , α_1 , α_2 , α_3 . . . setzen könne, wo die Zeigerzahlen 0, 1, 2, 3 . . . mit den Exponenten der zugehörigen Potenzen von x übereinstimmen [no. 9; 52. p. 44].^o)

^o) Solcher Buchstaben mit Zeigerzahlen bedient sich auch LACROIX sehr häufig, und merkt dabey an: A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , etc. sont des coefficients indépendans de x , et les chiffres inférieurs 0, 1, 2, 3 etc. marquent l'exposant de la puissance de x , qui multiplie la lettre, à la quelle ils sont attachés; ainsi A_m sera le coefficient de x^m . Ce qui m'a déterminé à employer cette notation, quoiqu'elle paraisse un peu compliquée, c'est que par son moyen il sera facile de découvrir la loi qui regne entre les valeurs des coefficients. *Traité du Calc. diff.* p. 33. Nämlich, schon in der gemeinen Arithmetik, und noch mehr in der Algebra, kommen Operationen und Zeichnungen vor, die man nicht für das nimmt, was sie

23. Die Regeln der Entwicklung der Derivationen $D. \varphi \alpha$, $D^2. \varphi \alpha$, $D^3. \varphi \alpha$ etc. kommen hier mit denen des Differentialcalculus für $d. \varphi \alpha$, $d^2. \varphi \alpha$, $d^3. \varphi \alpha$, etc. für veränderliche α ; $d. \alpha$, $d^2. \alpha$, $d^3. \alpha$ etc. vollkommen überein. Auch fällt in die Augen, daß

$$\varphi \alpha, \frac{D. \varphi \alpha}{1}, \frac{D^2 \varphi \alpha}{1. 2}, \frac{D^3 \varphi \alpha}{1. 2. 3} \text{ u. s. w. (ohne Punct}$$

nach dem D) die Coefficienten! der successiven Glieder

sind, wenigstens nicht daran denkt — combinatorische. So ist das Schreiben der Zahlen nach ihrer Folge, eine fortlaufende combinatorische Anordnung der Ziffern; so giebt die alphabetische Ordnung der Buchstaben $a, b, c, d \dots$ oder die Reihe der Zahlen $0, 1, 2, 3 \dots$ an sich und mit Buchstaben verbunden, die Grundlage für die daraus abzuleitenden combinatorischen Ordnungsgesetze; und man sieht leicht, daß, in den gewöhnlichen Fällen, auf den todt'en Buchstaben wenig oder nichts, auf die ihm beygefügte lebendige Zahl hingegen fast alles ankommt. Von den verschiedenen Arten die Coefficienten mit Buchstaben und Zahlen zu bezeichnen, in meinem (*Nov. Syst. Comb.*, p. XXXIV — XLI) ausführlich. Die einfachsten Lokalzeichen (wie ich sie nenne) sind die Leibnitzischen *Numeri assumptitii siue supposititii* (Ebend. p. X, 30. *Refert* etc., und hier, S. 154. A). BÜRMANNS geistreiches *Polynome Combinatoire*. (hier S. 54. ff.) giebt unzählige Beyspiele von diesem Gebrauche.

Die Mittel also, die ARBOGAST hier (in 22) für die Zeichnung der Coefficienten der Potenzen von x vorschlägt, um bey einiger Fertigkeit, statt der derivativen Zeichen sogleich ihre Werthe schreiben zu können, [no. 9] sind wahrhaft combinatorischer Art, und die combinatorische Differenzial-Formel, die in der Folge (39) soll aufgeführt werden, wird zeigen, wie das was ARBOGAST fordert, und für die wirkliche Ausübung immer noch sehr schwierig erfunden werden dürfte (weil man doch eine Derivation nach der andern suchen muß, um zu wissen, was man an ihrer Stelle zu substituiren habe); diese Formel, sage ich, wird zeigen, wie jene Forderung mit absoluter Leichtigkeit, die nichts zu wünschen übrig läßt, sich ausführen lasse.

der Entwicklung von $\varphi(\alpha + x)$; und

$$\varphi \alpha, \frac{D. \varphi \alpha}{1}, \frac{D^2. \varphi \alpha}{1.2}, \frac{D^3. \varphi \alpha}{1.2.3} \text{ u. s. w. (mit ei-}$$

nem Punct nach dem D) die Coefficienten der successiven Glieder der Entwicklung von $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ sind [no. 10]; wo also $\frac{D^n. \varphi \alpha}{1.2..n}$ den $(n+1)$ ten

Coefficienten dieser Entwicklung ausdrückt, d. i. $\varphi(p) n(n+1)$, wenn man $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} = p$ setzt.

24. Das erste Glied $\varphi \alpha$ der evolvirten Function (18, 20) oder dasjenige, von welchem man alle übrige derivirt, heisst der Anfang oder Ursprung (*origine*) der Derivationen. Zuweilen fällt das Derivationsgesetz deutlicher in die Augen, wenn man das zweyte Glied zum Anfange der Derivationen nimmt.

Ist dieses Anfangsglied gegeben, und hat man darin, oder in einigen der evolvirten Glieder, die Grössen aufgefunden, welche Functionen von andern Grössen sind, so macht das Übrige sofort keine Schwierigkeit, und die weitere Entwicklung geschieht fast ganz mechanisch: alles bezieht sich nemlich auf eine Reihe von Operationen, die sämtlich einen regelmässigen Gang befolgen.

Hätte das erste Glied α des Polynoms einen besondern Werth; wäre z. B. $\alpha = 1$, so würde $\varphi 1$ kein bequemes Anfangsglied seyn, die übrigen Glieder daraus zu deriviren. Man setze in diesem Falle statt 1 eine Grösse von unbestimmtem Werthe α , mit dem Vorbehalt in den gezogenen Resultaten den besondern Werth 1 wieder in die Stelle von α zu setzen [no. 11].

Hier ein paar Beyspiele zu Erläuterung der Auflösungsformel; für die Aufgabe (20).

E x e m p e l I.

25. Die Function

$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m$
in eine Reihe von der Gestalt

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$
zu entwickeln.

Aufl. Weil x jede beliebige Werthe haben kann: so müssen die von x unabhängigen Grössen, *feinzel*n einander gleich seyn. Daraus folgen, das erste Glied

$A = \alpha^m$; und daraus weiter $B = D. A$, und $C = \frac{D.B}{2}$

und $D = \frac{D.C}{3}$, und $E = \frac{D.D}{4}$, u. s. w. die

übrigen Coefficienten; jeder folgende aus dem nächstvorhergehenden, hinter einander, durch ganz einfache Derivationen (nach 21). Der Calcul, ohne weitere Abkürzung, giebt folgendes:

$$A = \alpha^m$$

$$B = D. A = m \alpha^{m-1} \cdot \xi$$

$$2 C = D. B = m \alpha^{m-1} \cdot 2 \gamma + m \cdot m - 1 \cdot \alpha^{-2} \cdot \xi, \xi.$$

$$C = m \alpha^{m-1} \gamma + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \xi^2$$

$$3 D = D. C = m \alpha^{m-1} \cdot 3 \delta$$

$$+ m \cdot m - 1 \cdot \alpha^{m-2} \xi \cdot \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} 2 \xi \cdot 2 \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} (m - 2) \alpha^{m-3} \xi \cdot \xi^2$$

$$D = m \alpha^{m-1} \delta + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \cdot 2 \epsilon \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3} \epsilon^3$$

$$4 E = D \cdot D = m \alpha^{m-1} \cdot 4 \epsilon$$

$$+ m \cdot m - 1 \cdot \alpha^{m-2} \cdot \beta \delta$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \cdot 2 \beta \cdot 3 \delta$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} \cdot 2 \gamma \cdot 2 \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} (m - 2) \alpha^{m-3} \cdot \epsilon \cdot 2 \epsilon \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3} \cdot 3 \epsilon^2 \cdot 2 \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m - 3) \alpha^{m-4} \epsilon \cdot \epsilon^3$$

$$E = m \alpha^{m-1} \epsilon + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} [2 \beta \delta + \gamma^2]$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3} \cdot 3 \epsilon^2 \gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{m-4} \epsilon^4$$

u. s w. Die successiven Derivationen $D.A$; $D.B$; $D.C$; $D.D$; etc. machen, wie man sieht, keine Schwierigkeit; aber die daraus erfolgenden Reductionen führen zu Weitläufigkeiten.

Exempel II.

26. Das 5^{te} Glied der Function

$\log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$
zu entwickeln.

Aufl. Das gesuchte Glied ist $Ex^4 = \frac{D^4 \phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4$,

wie aus (20; S. 188) erhellet. Man darf also, den

Coefficienten E zu finden, nur alle Glieder des Werthes von $D^4 \cdot \varphi \alpha$ in (17) mit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ dividiren, und statt $D \varphi \alpha$, $D^2 \varphi \alpha$, $D^3 \varphi \alpha$, $D^4 \varphi \alpha$; und $D \cdot \alpha$, $D^2 \cdot \alpha$, $D^3 \cdot \alpha$, $D^4 \cdot \alpha$, die zugehörigen Ausdrücke in α , β , γ , δ , ε setzen. Es ist aber

Für $\varphi \alpha = \log \alpha$ ingleichen (S. 188)

$$\begin{aligned} D \varphi \alpha &= + \alpha^{-1} & D \cdot \alpha &= 1 \beta \\ D^2 \varphi \alpha &= - 1 \alpha^{-2} & D^2 \cdot \alpha &= 1 \cdot 2 \gamma \\ D^3 \varphi \alpha &= + 1 \cdot 2 \alpha^{-3} & D^3 \cdot \alpha &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \delta \\ D^4 \varphi \alpha &= - 1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^{-4} & D^4 \cdot \alpha &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \varepsilon \end{aligned}$$

Folglich (17)

$$\begin{aligned} & \frac{D \varphi \alpha \cdot D^4 \cdot \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\alpha^{-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \varepsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \alpha^{-1} \varepsilon \\ & + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (4 D \cdot \alpha \cdot D^3 \cdot \alpha + 3 [D^2 \cdot \alpha]^2) \\ & = \frac{- \alpha^{-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (4 \beta \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \delta + 3 \cdot 4 \gamma^2) \\ & = - \frac{\alpha^{-2}}{2} (2 \beta \delta + \gamma^2) \\ & + \frac{6 D^3 \varphi \alpha \cdot (D \cdot \alpha)^2 \cdot D^2 \cdot \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6 \cdot 1 \cdot 2 \alpha^{-3} \beta^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ & = \frac{\alpha^{-3}}{3} \cdot 3 \beta^2 \gamma \\ & + \frac{D^4 \varphi \alpha (D \cdot \alpha)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{- 1 \cdot 2 \cdot 3 \alpha^{-4} \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = - \frac{\alpha^{-4}}{4} \beta^4 \end{aligned}$$

Die Summe dieser Werthe giebt demnach $\frac{D^4 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ d. i.

$$\begin{aligned} E &= \alpha^{-1} \varepsilon - \frac{\alpha^{-2}}{2} (2 \beta \delta + \gamma^2) + \frac{\alpha^{-3}}{3} \cdot 3 \beta^2 \gamma \\ & \quad - \frac{\alpha^{-4}}{4} \beta^4 \end{aligned}$$

mit dem Ausdrucke für E [no. 12; S. 9.] übereinstimmend. Auch hier (wie in 25) führen die Derivatio-

nen durch überflüssige Factoren, die sie aufführen, und weshalb man (erst) eine Reduction anstellen muß, in Weitläufigkeit. Man vergleiche Note (n).

27. Die beiden Beispiele (25, 26) erläutern das Verfahren von zwo Seiten vollständig. Ein Paar andere, aber nur von der ersten Art (wenn nemlich folgende Glieder aus nächst vorhergehenden abgeleitet werden) hat ARBOGAST [no. 14, 16] beygebracht; auch gelegentlich gezeigt, wie daraus für die Coefficienten A, B, C, D die bekannten Formeln mit recurrirenden Gliedern können hergeleitet werden.

DRITTER ABSCHNITT.

Simplification des Arbogastischen Satzes [no. 7. hier 20] durch die combinatorische Analysis. Ableitung desselben Satzes, von derivativen Vorstellungen unabhängig, durch die combinatorische Methode der Potenzen. Uebergang aus den Differentialen von Φx , wo alle höhere Differentiale von x beibehalten werden, in die Reihe für $\Phi (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$. Verschiedene Bedeutungen der derivativen Function $\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n}$.

28. Die Fiction (9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ der polynomischen Reihe unter dem Functionalzeichen als veränderlich und von einander abhängig anzusehen, und $\frac{D^n \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n}$ als eine in die einfachern $\frac{D \Phi \alpha}{1}, \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, \frac{D^n \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n}$, und

in $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$. . . $D^n.\alpha$ mit ihren Potenzen, zerlegbare Differentiation (17) aufzustellen, und am Ende 1δ ; 1.2γ ; $1.2.3\delta$. . . $1.2 \dots n \alpha_n$ statt $D.\alpha$; $D^2.\alpha$; $D^3.\alpha$. . . $D^n.\alpha$ zu setzen (20); dieser Gedanke, sage ich, ist sinnreich und vielumfassend. So leicht aber auch auf diesem Wege wie so eben gezeigt worden ist, die ersten Glieder sich entwickeln lassen, so erinnert doch ARBOGAST selbst [no. 19] (weil dadurch Grössen, die aus denselben Buchstaben bestehen, nicht selten mehreremale ^{p)} aufgeführt, und so Reductionen der zugehörigen numerischen Coefficienten wiederholt veranlaßt werden) es führe dieses Verfahren für spätere Glieder zu Weitläufigkeiten; um so mehr, je entfernter diese vom ersten oder dem Anfangsgliede sind. „Man hat also“ (fährt dieser scharfsinnige Analyst fort) Grund zu fragen, ob „sich nicht dieses Verfahren bis zu dem Punkte vereinfachen lasse, daß alle Reduction dabei aufgehoben wird, dergestalt, daß wenn irgend ein Glied (gut) geordnet gegeben ist, man augenblicklich das nächstfolgende daraus ableiten, oder auch jedes Glied für sich und außer der Ordnung [*terme isolé et hors du rang*, no. 4c.] von allen übrigen, vorhergehenden und folgenden, unabhängig darstellen, und zwar bereits ganz reducirt und in der einfachsten Gestalt darstellen könne; mit solcher Leichtigkeit, daß nicht mehr Zeit dazu erfordert wird, als nöthig ist, die Glieder zu schreiben [no. 30, 42.].“

p) So z. B. im Exempel I. (25.) kommen die Glieder, welche $\alpha^{m-2} \delta \gamma$ und $\alpha^{m-2} \beta \delta$ und $\alpha^{m-3} \delta^2 \gamma$ enthalten, jedes zweymal; und so diese und andere in der Folge noch öfter vor; welches denn mehrere Reductionen ihrer Zahlencoefficienten nöthig macht. Wegen der Zahlencoefficienten und ihrer Reduction vergleiche man Exempel II. (26.)

29. Diese Forderung ist so vollkommen mit dem übereinstimmend, was an den combinatorischen Anordnungen schon vorlängst und mehrere male, vorzugsweise gerühmt ⁹⁾, und nur noch neuerlich bey Aufstellung einer combinatorischen Involution (Samml. II. S. 98.) von mir wiederholt worden ist. Ich will auch diese Stelle zu unmittelbarer Vergleichung hier hersetzen: „Eine leichtere Darstellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer Ordnungen, von einander, löst sich nicht gedenken. Sie bedarf keiner Vorbereitung, stellt die Buchstaben, sogleich mit ihren Exponenten versehen, auf, und ist frey von allen Substitutionen complexer Zeichen. Ihre rein-combinatorische Anordnung beruht ganz auf einer äusserst leichten Umtauschung der Buchstaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glieder zu schreiben. Alles wird gleich so und an dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern (reduciren) oder zu verrücken, zusammenge-
setzt, wie und wo man es zum Gebrauche nützlich findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexionen unter oder nebeneinander, oder in welcher andern Lage man sie schreiben will.“

30. Für die Evolution der Functionen werden demnach (in 28) von dem derivativen Verfahren gleiche Vorthelle, als (in 29) von den combinatori-

⁹⁾ *Adhibui notationis modum eiusmodi, qui terminorum singulorum progressus legem — manifeste ante oculos ponit, sic ut, ex terminis, qui proponuntur, generalioribus, terminorum quaesitorum coefficientes quicunque, ex ordine et extra ordinem, a praecedentibus independenter, in terminis statim simplicissimis, per coefficientes datos particulares definitis, facillime possint, et absque ulla reductione, quae vulgo comitari solet substitutiones, DERIVARI. Lusin. Dign. Praef. p. XII, XIII.*

schen Involutionen versprochen. Was letztere leisten, ist allgemein bekannt, und die Kenner haben hierüber einstimmig entschieden. Auch darüber scheint man bisher einverstanden gewesen zu seyn, daß eine so leichte Darstellung der Glieder, wie die combinatorische, auf einem andern Wege schwerlich oder gar nicht zu erreichen seyn möchte. Um so mehr wird die Erwartung gespannt, durch welches nicht-combinatorische Verfahren, und wie insbesondere durch analytische Derivationen, oder ihre Vermittelung die (in 28) versprochenen Vortheile zu erlangen seyn dürften?

31. Bevor ich zu dem von ARBOGAST [no. 20, 21] eigends dafür aufgesellten, und besonders (von jenem Satze [no. 7] hier (20) unabhängig) erwiesenen Lehrsatz fortgehe, so wird es nützlich seyn zu versuchen, in wie fern jener, an sich zwar lehrreiche und wichtige, aber für die Ausübung und Anwendung zu behandeln schwierige (28) Satz [no. 7] sich combinatorisch verbessern und erleichtern, und zu einem, dem [no. 20] vollkommen gleichgültigen Lehrsatz umformen und darstellen lasse. Eine weitere Analyse und Simplification des Satzes [no. 7] ist gewiß ganz in dem Arbogastischen Plane; um so mehr, wenn er sich zuletzt in den Satz [no. 20] auflöst, und dadurch den Zusammenhang beider deutlich vor Augen legt.

32. Unbehülflich ist der derivative Satz (20) darin, daß man seine Coefficienten $\frac{D. \Phi \alpha}{1}, \frac{D^2. \Phi \alpha}{1.2},$

$\frac{D^3. \Phi \alpha}{1.2.3}, \dots, \frac{D^n. \Phi \alpha}{1.2 \dots n},$ durch successive Differen-

tiation suchen muß (17) und kein Mittel angegeben wird, wie man sie unabhängig von einander finden, oder doch die im ersten Falle eintretenden großen Weitläufigkeiten (Note n) vermeiden könne. Ein

Verfahren, das dieser Unbequemlichkeit abhülfe, würde schon eine große Verbesserung seyn. Eine solche wird man in der Anwendung der vom Professor PFAFF aufgestellten Aufgabe (Samml. II. S. 158. §. 4.) und deren Auflösung (das. S. 160, 161.) finden ^{r)}.

33. Die Pfaffische Aufgabe in solchen Zeichen aufzuführen, als man hier braucht, darf man nur

statt der dortigen	hier setzen:	statt der dortigen	hier setzen:
d^n	$D^n.$	x	α
X	$\varphi \alpha$	dx	$D.\alpha$
X'	$D\varphi \alpha$	$d^2 x$	$D^2.\alpha$
X''	$D^2\varphi \alpha$	$d^3 x$	$D^3.\alpha$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X^n	$D^n \varphi \alpha$	$d^n x$	$D^n.\alpha$

und nun die

„Aufgabe (a. a. O. S. 158.)

„Es sey $\varphi \alpha$ irgend eine Function der veränderlichen α ; aus ihren Differentialen, wenn $D\alpha$ beständig ist, dieselbigen herzuleiten, wenn kein beständiges Differential von α angenommen wird.“

^{r)} Die Auflösung der Aufgabe wird dort (S. 160) zuerst in Lokalzeichen $Px^n; P^2x(n-1); P^3x(n-2); \dots$ denen die combinatorischen Classenzeichen $a^n A; b^n B; c^n C; \dots$ correspondiren, ausgedrückt. Ich will hier die letzte Darstellung (S. 161) aufführen, und die erste (in Lokalzeichen) in der Folge (43) nachholen. Es ist nützlich, beyde zu kennen, um nach Umständen Gebrauch davon zu machen.

„Auflösungs-Formel (Ebend. S. 161.)

$$\begin{aligned} \text{„} \quad \frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1.2 \dots n} &= \frac{D \varphi \alpha}{1} a^n A + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1.2} b^n B \\ \text{„} \quad &+ \frac{D^3 \varphi \alpha}{1.2.3} c^n C + \dots + \frac{D^n \varphi \alpha}{1.2 \dots n} n^n N \end{aligned}$$

$$\text{„} \quad \left(\frac{D \cdot \alpha}{1}, \frac{D^2 \cdot \alpha}{1.2}, \frac{D^3 \cdot \alpha}{1.2.3} \dots \right)$$

Das hier in Klammern Eingeschlossene ist bekanntermaßen der Zeiger für die Complexionen der Combinationsklassen ${}^n A$, ${}^n B$, ${}^n C$, etc.

34. ARBOGAST unterscheidet [no. 35] *Dérivées simples*, wie $D^n \cdot \varphi \alpha$, von *Dérivées divisées*, $\frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1.2 \dots n}$;

auch bestimmt der Werth der einen Art sogleich den Werth der andern. So z. B. wäre (33)

$$\begin{aligned} D^n \cdot \varphi \alpha &= 1.2 \dots n \left[\frac{D \varphi \alpha}{1} a^n A + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1.2} b^n B \right. \\ &\quad \left. + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1.2.3} c^n C + \dots + \frac{D^n \varphi \alpha}{1.2 \dots n} n^n N \right] \end{aligned}$$

(Der Zeiger hier, wie in 33).

Für die *Dérivées divisées* wird [no. 39] ein besonderes Zeichen eingeführt, und D_c^m statt $\frac{D^m}{1.2 \dots m}$, inglei-

chen $D_c^n \cdot \varphi \alpha$ statt $\frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1.2 \dots n}$ gesetzt. Ich werde mich für den wenigen Gebrauch, den ich von diesen Zeichen hier mache, dieser Abkürzung nicht bedienen.

Exempel zu (34).

35. Den Werth der einfachen *Dérivée* $D^5 \cdot \varphi \alpha$, von den vorhergehenden unabhängig, in Differentialen von $\varphi \alpha$ und α , gut geordnet darzustellen.

Man setze $n=5$ in (34) und entwickle, nach dem Zeiger, die Complexionen der Classen ${}^5A$, ${}^5B$, ${}^5C$, ${}^5D$, ${}^5E$, mit Vorsetzung der zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten a , b , c , d , e , und Beyfügung der $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$. . . $D^5\varphi\alpha$, wie solche in der Formel den einzelnen Classen vorstehen. Dies giebt:

$$D^5.\varphi\alpha = D\varphi\alpha.D^5.\alpha + D^2\varphi\alpha[5D.\alpha.D^4.\alpha + 10D^2.\alpha.D^3.\alpha] \\ + D^3\varphi\alpha[10(D.\alpha)^2.D^3.\alpha + 15D.\alpha.(D^2.\alpha)^2] \\ + D^4\varphi\alpha.10(D.\alpha)^3.D^2.\alpha + D^5\varphi\alpha.(D.\alpha)^5$$

36. Ausserdem, dass man mittelst der Pfaff'schen combinatorischen Formel jedes Glied $D^n.\varphi\alpha$ (mit oder ohne Divisor $(1.2.3\dots n)$ von allen vorhergehenden unabhängig, findet, erlangt man das gesuchte Resultat auch viel leichter als auf dem Wege der successiven Derivation. Den Unterschied deutlich einzusehen, dürfte man nur hier $D^5.\varphi\alpha$ aus $D[D^4.\varphi\alpha]$ nach dem Werthe von $D^4.\varphi\alpha$ in (17) durch gewöhnliche Differentiation suchen, wo man gar bald, und noch vielmehr bey spätern Gliedern, in Weitläufigkeiten gerathen würde.

37. Setzte man in (35) die Werthe von $\varphi\alpha$ und der Differentialen von $\varphi\alpha$ und α , wie in (26) also

$$\varphi\alpha = \log.\alpha; D\varphi\alpha = \alpha^{-1}, \dots D^5.\varphi\alpha = 1.2.3.4\alpha^{-5}$$

$$D.\alpha = 1\beta; D^2.\alpha = 1.2\gamma; \dots D^5.\alpha = 1.2.3.4.5\zeta$$

und dividirte alle Glieder durch $1.2.3.4.5$, so fände man den Coefficienten des 6ten Gliedes von

$$\log.(\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.})$$

$$\text{oder } F = \alpha^{-1}.\zeta - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\varepsilon\varepsilon + 2\gamma\delta)$$

$$+ \frac{\alpha^{-3}}{3}(3\varepsilon^2 + 3\varepsilon\gamma^2) - \frac{\alpha^{-4}}{4}4\varepsilon^3\gamma + \frac{\alpha^{-5}}{5}\varepsilon^5$$

gleich gut geordnet; vollkommen, wie [no. 12, p. 9]

38. Das Verfahren (35 — 37) wo man 1) die *Dérivée simple* $D^5. \varphi \alpha$ (durch Aufhebung des Divisors $1.2.3.4.5$) nach (34), in $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$. . . $D^5\varphi\alpha$ und $D.\alpha$, $D^2.\alpha$. . . $D^5.\alpha$ ausdrückt, 2) nachher die Werthe 1β ; 1.2γ . . . $1.2.3.4.5\zeta$, für $D.\alpha$; $D^2.\alpha$; . . . $D^5.\alpha$ (37) substituirt, und zugleich 3) durch den Divisor $1.2.3.4.5$ die *Dérivée simple* zur *divisée* macht; dieses Verfahren, sage ich, würde ein beträchtlicher Umweg seyn, und dennoch wäre er viel kürzer, als wenn man die gewöhnliche Heerstrasse der successiven Differentiation verfolgt. Aber es läßt sich dasselbe sehr stark, und über alle Vorstellung hinaus beträchtlich, abkürzen und simplificiren, wenn man die Substitution der Werthe für

$$D.\alpha = 1\beta; D^2.\alpha = 1.2\gamma; D^3.\alpha = 1.2.3\delta; \\ D^4.\alpha = 1.2.3.4\varepsilon, \text{ etc.}$$

nicht in den entwickelten Werth von $D^n.\varphi\alpha$ in (35) sondern sogleich in den Zeiger der Auflösungsformel (33) macht. Denn durch diese Substitution verwandelt sich jener zusammengesetzte Zeiger (33)

$$\left(\frac{1}{D.\alpha}, \frac{2}{D^2.\alpha}, \frac{3}{D^3.\alpha}, \frac{4}{D^4.\alpha}, \frac{5}{D^5.\alpha} \dots \right)$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1.2}, \frac{3}{1.2.3}, \frac{4}{1.2.3.4}, \frac{5}{1.2.3.4.5} \dots \right)$$

in den ganz einfachen

$$\left(1, 2, 3, 4, 5, \dots \right)$$

$$\left(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \dots \right)$$

Hier bleiben bloß die leicht zu übersehenden $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, . . . in der Formel (33); die beschwerliche Differentiation $D^n.\varphi\alpha$ hingegen, fällt ganz weg, weil die $D.\alpha$; $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, . . . die man daraus brauchte; nun durch die simplen β , γ , δ , . . . vertreten werden, deren Verbindungsgesetz durch die $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, . . . , combinatorisch, das heißt hier, mit

absoluter Leichtigkeit (Note o am Ende) gegeben sind, die nichts zu wünschen übrig läßt.

39. Und nun die aus (38) abgeleitete combinatorisch-analytische ganz simple Auflösungsformel des Hauptproblems (20).

Es ist nämlich: $\Phi(p) n(n+1)$ oder

$$A_n = \frac{D^n \cdot \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{D \Phi \alpha}{1} a^n A + \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2} b^n B + \frac{D^3 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^n C + \dots + \frac{D^n \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} n^n N \quad (33)$$

Folglich $\Phi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.})$

$= \Phi \alpha$

$+ \frac{D \Phi \alpha}{1} a^1 A x$

$+ \left(\frac{D \Phi \alpha}{1} a^2 A + \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2} b^2 B \right) x^2$

$+ \left(\frac{D \Phi \alpha}{1} a^3 A + \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2} b^3 B + \frac{D^3 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^3 C \right) x^3$

$+ \left(\frac{D \Phi \alpha}{1} a^4 A + \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2} b^4 B + \frac{D^3 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^4 C \right.$

$\left. + \frac{D^4 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 D \right) x^4$

$+ \dots$
 $\left(\begin{matrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \theta, & \iota, & \kappa, & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \dots \end{matrix} \right)$

Das Fortgangsgesetz, sowohl für die successiven Diffe-

rentiale $\frac{D \Phi \alpha}{1}, \frac{D^2 \Phi \alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3 \Phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots$ als auch für die

combinatorischen Grössen $a^n A, b^n B, c^n C \dots$ fällt deutlich in die Augen.

40. In dieser evolvirten Function ist eben so wie in (20) α der einzige mit dem Functionalzeichen ϕ behaftete Buchstabe; daher auch die Differentialen von $\phi\alpha$, nach Beschaffenheit der Function, sehr verschiedene Werthe haben können. Die folgenden Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ der polynomischen Reihe hingegen, machen die Bestandtheile der Combinationsclassen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, {}^nD, \dots$ nach dem beygegebenen Zeiger aus. Diese Classen, mit den zugehörigen Versetzungszahlen $a, b, c, d \dots$, der Elemente ihrer einzelnen Complexionen, stellen die Coefficienten der Potenzen ganzer positiver Zahlen $1, 2, 3 \dots n$ der Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$ dar, und sind für alle mögliche Functionen der Polynomien, für denselben Zeiger, dieselben; daher sie auch ARBOGAST mit einem auszeichnenden Namen Polynomial-Grössen genannt hat [no. 23]. Wie sich die Complexionen der Combinationsclassen, ${}^nA, {}^nB, {}^nC \dots$ für bestimmte Werthe von n , combinatorisch entwickeln und darstellen lassen, kann ich, als bekannt voraussetzen. Diejenigen Leser inzwischen, die gleichwohl hier noch einige Belehrung wünschen und erwarten, werden solche im ersten Anhang zu dieser Abhandlung finden.

41. Der Satz (39) bei welchem die Aufgabe (20) zum Grunde gelegt worden, läßt sich auch aus Taylor's Satze, auf blos combinatorischen Wegen ganz kurz und direct herleiten, auch vortheilhaft darauf mein *Methodus Potentiarum* (*Infin. Dign.* p. 101, 102) anwenden, von welchem ich erinnere und durch eine große Menge von Beyspielen (*Ibid.* p. 102 — 120) gezeigt habe, daß er eine Brücke sey, auf welcher man aus den Functionen der Binomien in die der Polynomien bequem übergeht^s).

^s) *Methodi Potentiarum latissime patet usus, quandoquidem generaliter potest et directe applicari, ubi in functione aliqua*

42. So wie nemlich aus dem Binom $\alpha + x$ das Polynom $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc}$ hervorgeht, wenn man statt x in jenem, die Reihe $\xi x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc}$. für dieses setzt: eben so darf man nur in der entwickelten Function (12)

$$\varphi(\alpha + x) = \varphi\alpha + \frac{D\varphi\alpha}{1} x^1 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.}$$

überall statt x und ihren Potenzen, die Reihe $\xi x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc}$. und ihre Potenzen, combinatorisch entwickelt, setzen und zuletzt alles nach $x^0, x^1, x^2, x^3, \dots$ oder nach steigenden Potenzen von x , ordnen, indem man die zu einerley Potenz von x gehörigen Coefficienten zusammen nimmt ¹⁾. Die Substitution jener Entwicklung, so wie diese Anordnung, hilft nun der *Methodus Potentiarum* ersparen, der alles in combinatorischen Zeichen sogleich entwickelt und gehörig geordnet auf einmal darstellt.

Vergleicht man nämlich die Reihe in y (*Infin Dign.* p. 101, no. 2.) linker Hand des dortigen Gleichheitszeichens, mit der hier entwickelten Reihe für $\varphi(\alpha + x)$ vom zweiten Gliede an, so sind

$$\begin{array}{l} \text{dort:} \quad a \quad b \quad c \quad d \quad \dots; y \\ \text{hier:} \quad \frac{D\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{D^4\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots; x \end{array}$$

und man findet, statt des dortigen z rechter Hand des Gleichheitszeichens, hier x gesetzt:

*sive serie, terminis quocunque constante, pro simplicium dignitatibus (x^n) substituendae sunt polynomiorum potestates ($\xi x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$)ⁿ; quo fit, ut ad functionum evolutiones, serierumque et aequationum transformationes sit fructuosissima (*Infin. Dign. Praef. p. XII.*)*

¹⁾ Eine ähnliche Substitution, in ähnlicher Absicht, hat auch ARBOGAST [no. 20, 21.] vorgenommen. Man sehe (55).

$$\begin{aligned} & \varphi(\alpha + \varepsilon x^1 + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) \\ &= \varphi \alpha + \frac{D \varphi \alpha}{1} a^1 A x^1 \\ &+ \left(\frac{D \varphi \alpha}{1} a^2 A + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} b^2 B \right) x^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

wie vorhin (39) $\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{pmatrix}$

43. In (39) beziehen sich die Combinationsclassen ^1A , ^2A , ^2B ; u. s. w. auf den untergesetzten ganz einfachen Zeiger $\begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & \delta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{pmatrix}$. Setzt man also

$$\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.} = p$$

so ist (Samml. II. S. 161. und statt des dortigen P hier p gesetzt)

$$a^n A = p^1 n; b^n B = p^2 n(n-1); c^n C = p^3 n(n-2); \dots$$

Statt dieser Classen für bestimmte $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ substituïre man (in 39) die zugehörigen auf p sich beziehenden Werthe, so erhält man aus der combinato-
rischen folgende Localformel:

$$\begin{aligned} & \varphi(\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}) \\ &= \varphi \alpha \\ &+ \frac{D \varphi \alpha}{1} p^1 n 1. x^1 \\ &+ \left(\frac{D \varphi \alpha}{1} p^1 n 2 + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} p^2 n 1 \right) x^2 \\ &+ \left(\frac{D \varphi \alpha}{1} p^1 n 3 + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} p^2 n 2 + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^3 n 1 \right) x^3 \\ &+ \left(\frac{D \varphi \alpha}{1} p^1 n 4 + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} p^2 n 3 + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^3 n 2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{D^4 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 n 1 \right) x^4 \\ &+ \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{pmatrix}$

44. Hier eine kurze Übersicht des Ganges der Verhandlungen (von 33 — 43)

I. Die Pfaffsche Aufgabe (Sml II. S. 158. §. 4.) geht auf die unmittelbare, von allen vorhergehenden Differentialen unabhängige, Darstellung des n^{ten} Differential der Function ϕx , wenn dx und alle höhere Differentiale von x beybehalten werden,

II. Die Auflösungsformel (Ebendas. S. 161) ^{u)} in differential- und combinatorischen Zeichen,

$$\frac{d^n \phi x}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{d \phi x}{1} a^n A + \frac{d^2 \phi x}{1 \cdot 2} b^n B + \frac{d^3 \phi x}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^n C + \dots + \frac{d^n \phi x}{1 \cdot 2 \dots n} n^n N$$

zeigt in jedem Gliede rechter Hand des Gleichheitszeichens ein Product aus zween Factoren. Die ersten Factoren dieser Producte sind Differentiale von ϕx nach der Reihe, für ein beständiges $dx = 1$; die zweyten Factoren sind Combinationsclassen $^n A$, $^n B$, $^n C \dots$ nach der Ordnung, mit den Versetzungszahlen $a, b, c \dots$ ihrer einzelnen Complexionen, und schaffen die höhern Differentiale von x , vermittelt des zusammengesetzten Zeigers:

^{u)} Eine der Pfaffschen ähnliche Formel, für $\frac{d^n \phi y}{1 \cdot 2 \dots n}$

oder $\frac{d^n z}{1 \cdot 2 \dots n}$, durch höhere Differentiale von $\log \phi y$

oder $\log z$ im Zeiger ausgedrückt, hat schon Prof. Rothe (Arch. der Math. H. IV. S. 433 — 435) gegeben. Auch Prof. ARBOGAST hat im VI. Abschnitte seines Werks [no. 361 — 364. p. 312, 313] die unmittelbare Darstellung von $d^n \phi x$ oder

$\frac{d^n \phi x}{1 \cdot 2 \dots n}$, ohne die vorhergehenden Differentiale zu ha-

ben, nachgewiesen, aber davon keine Anwendung auf seinen Satz [no. 7] gemacht.

$$\left(\frac{d^1 x}{1}, \frac{d^2 x}{1.2}, \frac{d^3 x}{1.2.3}, \frac{d^4 x}{1.2.3.4}, \dots \right)$$

herbey, der sie enthält.

III. Die Arbogastische Annahme (8. 9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ der polynomischen Reihe als veränderlich anzusehen, und auch so zu behandeln,

verstattet, die Auflösungsformel für $\frac{d^n \cdot \varphi x}{1.2 \dots n}$ (in II.) auch

auf $\frac{d^n \cdot \varphi x}{1.2 \dots n}$ auszudehnen, und bei der so nahen Ver-

wandschaft der Differentiationen und Derivationen unter einander (13), die Zeichnung (33) dafür festzusetzen. Daraus ergeben sich die Werthe der *Derivées divisées* und *simples*, ausser der Ordnung, viel leichter, als auf dem gewöhnlichen Wege der successiven Differentiation (34, 35, 36).

IV. ARBOGAST nimmt ferner die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ nicht blofs als veränderliche, sondern auch als von einander abhängige Grössen an, so unabhängig sie auch immer an sich seyn mögen. Dieser hevristischen Fiction gemäß, werden nach geendeten Derivationen, für $D \cdot \alpha, D^2 \cdot \alpha, D^3 \cdot \alpha, \dots$ die zugehörigen $1\epsilon; 1.2\gamma; 1.2.3\delta; \dots$ gesetzt (20) und das Exempel (37); und so findet man sich auf einmal aus φx und ihren Differentialen, in $\varphi(\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \dots)$ und ihre Evolution versetzt; in so fern nämlich die Coefficienten der zu evolvirenden letztern Function von den Differentialen der ersten sich ableiten lassen.

V. Schafft man nach ARBOGAST's Vorschrift, die $D \cdot \alpha; D^2 \cdot \alpha; D^3 \cdot \alpha \dots$ und ihre Potenzen erst in die Formel (II) nach dem dortigen Zeiger, und substituirt dann die zugehörigen Werthe (IV) für sie, so geräth man in Weitläufigkeit, die man vermeidet, wenn

man (38) die Substitution sogleich in den Zeiger selbst macht. Dadurch verschwinden alle derivativen Ausdrücke auf einmal, und die ganz einfachen $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ erscheinen an dem Platze ihrer Stellvertreter

$$\frac{D. \alpha}{1} ; \frac{D^2. \alpha}{1.2} ; \frac{D^3. \alpha}{1.2.3} ; \frac{D^4. \alpha}{1.2.3.4} ; \dots$$

und geben so den Zeiger für die Classen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, \dots, {}^nN$.

VI. Daraus fließt der nicht weiter abzukürzende analytisch - combinatorische Satz (39) — eine schöne Blume, auf derivativen Boden gezogen, (20) und in combinatorischen verpflanzt, wo sie so herrlich gedeiht! —

VII. Will man die combinatorische Evolutionsformel (39) von derivativen Vorstellungen (III, IV) ganz unabhängig, so leicht und so geschwind als möglich aufstellen: so darf man nur das in (41) an- und in (42) ausgeführte directe combinatorische Verfahren befolgen. Die combinatorische Methode der Potenzen führt hier geschwinder, als jede andere zum Ziel.

VIII. Aus der Evolutionsformel (39) folgt sogleich, vermöge Substitution der Localwerthe für die Classen, die correspondirende Localformel (43).

45. Es verdient besonders bemerkt zu werden, wie man hier (44) aus den Differentialen von φx (wo dx, d^2x, d^3x , u. s. w. alle höhere Differentialen beybehalten werden) in die Coefficienten der Reihe für $\varphi(\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ übergeht.

Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential, ist (44, II)

$$\text{I. } \frac{d^n \cdot \phi x}{1.2 \dots n} = \frac{d \phi x}{1} a^n A + \frac{d^2 \phi x}{1.2} b^n B + \dots$$

$$+ \frac{d^n \phi x}{1.2 \dots n} n^n N$$

$$\left(\frac{1}{dx}, \frac{2}{d^2 x}, \frac{3}{d^3 x}, \frac{4}{d^4 x}, \dots \right)$$

Der $(n+1)$ te, zu x^n gehörige, Coefficient der Reihe für ϕ ($\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \text{etc.}$) ist (39)

$$\text{II. } \frac{D^n \cdot \phi \alpha}{1.2 \dots n} = \frac{D \phi \alpha}{1} a^n A + \frac{D^2 \phi \alpha}{1.2} b^n B + \dots$$

$$+ \frac{D^n \phi \alpha}{1.2 \dots n} n^n N$$

$$\left[\begin{array}{l} D \cdot \alpha = 1 \cdot \beta \\ D^2 \cdot \alpha = 1 \cdot 2 \cdot \gamma \\ D^3 \cdot \alpha = 1 \cdot 2 \cdot 3 \delta \\ \vdots \end{array} \right]^v \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \epsilon & \gamma & \delta & \epsilon & \dots \end{array} \right)$$

Um also aus I in II überzugehen, darf man in I nur x mit α , und d mit D , vertauschen, und statt des dortigen

zusammengesetzten Zeigers $\left(\frac{1}{d \cdot \alpha}, \frac{2}{d^2 \cdot \alpha}, \frac{3}{d^3 \cdot \alpha}, \dots \right)$

^{v)} Ich habe, daß nach geendeten Differentiationen von $D^n \cdot \phi \alpha$, die $D \cdot \alpha$, $D^2 \cdot \alpha$, $D^3 \cdot \alpha$. . . mit 1β , $1 \cdot 2 \gamma$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \delta$, . . . zu vertauschen seyen, zeigerförmig (durch eckigte Klammern) hier angegeben; denn nur unter dieser Voraussetzung findet der einfache combinatorische Zeiger unter $a^n A$, $b^n B$. . . statt. Ich werde jenen darstellenden derivativen Zeiger in der Folge, der Deutlichkeit und Vollständigkeit wegen, neben dem combinatorischen mit beifügen, auch, wo es der Raum verstattet, zuweilen so schreiben:

$$\left[\begin{array}{cccccc} D \cdot \alpha & D^2 \cdot \alpha & D^3 \cdot \alpha & D^4 \cdot \alpha & \dots \\ 1 \epsilon & 1 \cdot 2 \gamma & 1 \cdot 2 \cdot 3 \delta & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \epsilon & \dots \end{array} \right]$$

den einfachen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \epsilon & \gamma & \delta & \dots \end{pmatrix}$ in II setzen, und die Combinationsclassen ${}^nA, {}^nB, \dots, {}^nN$ darauf beziehen: denn dadurch wird den Arbogastischen beiden Annahmen (44, III, IV.) vollkommen Genüge geleistet (44, V.).

46. Exempel, für $\phi x \equiv \log. x$; $\phi x \equiv e^x$; $\phi x \equiv x^m$

a) für ein beständiges dx

$$\frac{d^n \log. x}{dx^n} = \pm 1.2.3.4 \dots (n-1) x^{-n}$$

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m.m-1.m-2 \dots (m-n+1) x^{m-n}$$

Für $dx \equiv 1$, fiele hierauch $dx^n \equiv 1$ im Divisor weg.

b) Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential (45, I.)

$$\frac{d^n \log. x}{1.2 \dots n} = \frac{1}{x} a^n A - \frac{1}{2x^2} b^n B + \frac{1}{3x^3} c^n C - \dots \pm \frac{1}{nx^n} n^n N$$

$$\frac{d^n e^x}{1.2 \dots n} = e^x \left(a^n A + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \dots \right)$$

$$+ \frac{n^n N}{1.2 \dots n}$$

$$\frac{d^n x^m}{1.2 \dots n} = m^n x^{m-1} a^n A + m^{\mathfrak{B}} x^{m-2} b^n B$$

$$+ m^{\mathfrak{C}} x^{m-3} c^n C + m^{\mathfrak{D}} x^{m-4} d^n D + \dots$$

$$+ m^{\mathfrak{N}} x^{m-n} n^n N)$$

$$\left(\frac{d.x}{1}, \frac{d^2.x}{1.2}, \frac{d^3.x}{1.2.3}, \frac{d^4.x}{1.2.3.4}, \dots \right)$$

Nämlich, statt ϕx (in 45, I.) nach und nach $\log. x$; e^x ; x^m gesetzt, und, was diese Substitution giebt, für $d\alpha = 1$ differentiirt.

c) Wenn man aus ϕx in die Coefficienten der zu evolvirenden Function

$\phi (\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ übergeht (45, II.)

$$\frac{D^n \log. \alpha}{1.2 \dots n} = \frac{1}{\alpha} a^n A - \frac{1}{2\alpha^2} b^n B$$

$$+ \frac{1}{3\alpha^3} c^n C - \dots + \frac{1}{n\alpha^n} n^n N$$

$$\frac{D^n e^\alpha}{1.2 \dots n} = e^\alpha \left(\frac{a^n A}{1} + \frac{b^n B}{1.2} + \frac{c^n C}{1.2.3} + \dots + \frac{n^n N}{1.2 \dots n} \right)$$

$$\frac{D^n \alpha^m}{1.2 \dots n} = m\alpha^{m-1} a^n A + m\alpha^{m-2} b^n B$$

$$+ m\alpha^{m-3} c^n C + \dots + n\alpha^{m-n} n^n N$$

$$\left[\begin{array}{l} D. \alpha = 1 \beta \\ D.^2 \alpha = 1.2 \gamma \\ D.^3 \alpha = 1.2.3 \delta \\ , , , \end{array} \right] \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \dots \\ \epsilon & \gamma & \delta & \epsilon \dots \end{array} \right)$$

Hier darf man (in b) nur α statt x , und statt des dortigen zusammengesetzten combinatorischen Zeigers, den hiesigen einfachen setzen, der sich zugleich auf den derivativen Zeiger (Note ν) bezieht. Die ersten beiden Formeln (in c) zeigen sich in der Anwendung am einfachsten; die letzte dagegen kommt bei weitem am häufigsten im Gebrauche vor.

Für $\frac{D^n \beta^m}{1.2 \dots n}$, was bey ARBOGAST und auch hierin

der Folge oft vorkommt, darf man nur überall, in der Formel und den untergesetzten beyden Zeigern

statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$

setzen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$

47. Die Reihen (46, c) sind lauter $(n+1)$ te, zu x^n gehörige, Coefficienten [$n(n+1)$ oder A_n in (39)] der zu evolvirenden Functionen:

$$\log(\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) \quad [\text{no. 12}]$$

$$e^{\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}} \quad [\text{no. 14}]$$

$$(\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m \quad [\text{no. 31}]$$

und zwar, im letzten Falle, für jeden Werth von m ganzen und gebrochenen, positiven und negativen.

Exempel für einen bestimmten Werth von n

48. In (46, c) sey $n=4$ und m bleibe unbestimmt, so ist

$$\begin{array}{l|l} {}^4A = 4 = \varepsilon & {}^m\mathcal{A} = m \\ {}^4B = \binom{13}{22} = \binom{\varepsilon\delta}{\gamma^2} & {}^m\mathcal{B} = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \\ {}^4C = 112 = \beta^2 \gamma & {}^m\mathcal{C} = \frac{m \cdot m - 1, m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ {}^4D = 1111 = \beta^4 & {}^m\mathcal{D} = \frac{m \cdot m - 1, m - 2, m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ \left(\begin{array}{cccc} \varepsilon & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) & \end{array}$$

Demnach sind die $n(4+1)$ oder die 5ten Coefficienten der Reihen (47)

oder $\log. (\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}) \cdot 5$

$\equiv$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} - \frac{2\varepsilon\delta + \gamma^2}{2\alpha^2} + \frac{3\varepsilon^2\gamma}{3\alpha^3} - \frac{\varepsilon^4}{4\alpha^4};$$

ferner $(e^{\alpha + \varepsilon x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}})^5$

$\equiv$

$$e^{\alpha} \left(\varepsilon + \frac{2\delta\delta + \gamma^2}{1 \cdot 2} + \frac{3\delta^2\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\delta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right)$$

und $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc})^m$ u 5

==

$$m \alpha^{m-1} \varepsilon + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \alpha^{m-2} (2\delta\delta + \gamma^2)$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{m-3} \cdot 3\delta^2\gamma$$

$$+ \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \alpha^{m-4} \delta^4$$

Die Vergleichung dieser Exempel mit denen in (25, 26, 27) zeigt die schnelle Wirksamkeit der combinatorischen Evolutionsformel (39) augenscheinlich.

Weil sich die rein-combinatorischen Operationen für die Classen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$. . . in Zahlen und Buchstaben gleich leicht, und von einander unabhängig, darstellen lassen, so habe ich sie hier, für $n=4$, beyde aufgeführt.

49. Andere Formeln von PFAFF (Samml. II a. a. O.)

$$\text{für } \frac{d^n \sin x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n \cos x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n \tan x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n \cot x}{1 \cdot 2 \dots n},$$

$$\frac{d^n \sec x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n \csc x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n A \sin x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n A \cos x}{1 \cdot 2 \dots n},$$

$$\frac{d^n A \tan x}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{d^n A \cot x}{1 \cdot 2 \dots n}; \text{ um aus } \phi x \text{ in } \phi(\alpha + \beta x$$

$+ \gamma x^2 + \text{etc.})$, aus (45, I in II) überzugehen. Die Polynomialgrößen $a^n A$, $b^n A$, $c^n C$. . . oder ihre Stellvertreter $p \alpha n$, $p^2 \alpha (n-1)$, $p^3 \alpha (n-2)$. . .

(43), bleiben dabei immer dieselben, nur die $\frac{D \phi \alpha}{1}$,

$$\frac{D^2 \phi \alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3 \phi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \text{ ändern sich nach Verschie-$$

denheit der Function verschiedentlich ab (40).

50. Von den vielfachen Anwendungen der allgemeinen combinatorischen Differenzialformel $\frac{D^n \cdot \phi \alpha}{1.2 \dots n}$

$\equiv$ (45, II) sind die für $\phi \alpha = \log. \alpha$ und für $\phi \alpha = \alpha^m$ (46, c), besonders die letztere, in Beziehung auf die dortigen Bedeutungen und Zeiger, bey weitem die wichtigsten. Die beiden Arbogastischen Annahmen führen darauf (44, III, IV) und erhöhen dadurch den Nutzen der Pfaffischen Aufgabe ungemein. Die combinatorischen Classenzeichen beziehen sich auf den ganz einfachen

Zeiger $\begin{pmatrix} \epsilon, & \gamma, & \delta & \dots \\ 1, & 2, & 3 & \dots \end{pmatrix}$ und geben so den Formeln in Absicht auf Darstellung und Anwendung, die größte Vollendung (44, V). Zunächst, und so auch in der Folge, wird häufig $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n}$ (46, c) vorkommen.

In diesem Falle wird nemlich β^m , wie vorher α^m , als *Origine des Dérivations* (24) angesehen.

51. Die derivative Function $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n}$ spielt in dem Arbogastischen Werke eine große Rolle, und kommt darinn sehr häufig vor. Ich will daher die verschiedenen Bedeutungen, die dieser Ausdruck nach verschiedenen Ansichten, die dabey statt finden, haben kann, hier angeben. ARBOGAST selbst hat sich darüber ausführlich erklärt [no. 52 — 54]. Diesen Erklärungen werde ich noch einige Bemerkungen und Erläuterungen beyfügen.

52. Die Bezeichnung $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n}$ und andere ähnliche Ausdrücke, so einfach sie auch an sich sind, weil dabey bloß das besondere Zeichen n vorkommt, haben gleichwohl verschiedene Bedeutungen.

I. Sie sind Zeichen von Derivationen. So z. B. drücken $\frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1.2 \dots n}$ und $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n}$, durch D^n , eine Reihe von Operationen aus, die man auf $\varphi \alpha$ oder β^m anwenden soll, die sämmtlich dasselbe Gesetz befolgen, und n mal wiederholt werden müssen; überdies zeigen sie, durch das Verhalten des D zu dem Differenzialzeichen d , die Natur dieses Gesetzes an, oder die Art von Derivation, welche der vorliegende Ausdruck erfordert (11, 12, 13).

Beyspiele von $\frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1.2 \dots n}$, für bestimmte n

(17); allgemeine Evolutionsformel dafür, durch Beyhülfe combinatorischer Zeichen (33, 34);

Wegen $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n}$ vergleiche man (46. b) nur statt der dortigen d , x , hier D , β gesetzt. Dieselbe Formel (aber für z^m statt β^m) kommt schon im Arch. der Mathem. H. II. S. 230; 7, 8 vor.

II, Sie sind Zeichen von Coefficienten; und weisen nicht bloß die Zahl des Gliedes zu dem sie gehören, sondern auch die Beschaffenheit der Function des Polynoms nach, von welcher das Glied, dessen Coefficient verlangt wird, ein Theil ist.

Es sey $\epsilon + \gamma x + \delta x^2 + \epsilon x^3 + \zeta x^4 + \text{etc.} = p$, so drückt

$$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1.2 \dots n} = \frac{p^m \kappa (n+1)}{p(\epsilon, \gamma, \delta \dots)}$$

1) den Coefficienten des $(n+1)$ sten, zu x^n gehörigen, Gliedes (den $(n+1)$ ten Coefficienten) der Potenz m von $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.}$ aus.

2) Werden dadurch zugleich, die Function β^m , und die darauf anzuwendenden Operationen D^n für den gesuchten Coefficienten $p^m \kappa (n+1)$ angegeben,

Anmerk. 1. (zu I. II) In der Formel (I) ist β^m nur ein einzelnes Glied (*Monomium*); in (II) wird aber eine ganze Reihe durch dieses *Monomium* ausgedrückt.

So z. B. bedeutet $\frac{D^4. \beta^m}{1.2.3.4}$ (in II) den 5ten, zu x^4 gehörigen Coefficienten der Potenz $(\epsilon + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m$, oder den Coefficienten E, wie er (in 25) gefunden worden ist; nur statt der dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, hier $\epsilon, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gesetzt. Eben so zeigt

$\frac{D^{10}. \sin. \gamma}{1.2 \dots 10}$ den Coefficienten des 11ten Gliedes der zu entwickelnden Function $\sin (\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 + \text{etc.})$ an, welche hier bloß durch das *Monom*, $\sin \gamma$ vorgestellt wird. Dafür dienen in der combinatorischen Zeichnung die Scaln $p[\epsilon, \gamma, \delta \dots]$ und $q[\gamma, \delta, \varepsilon \dots]$ etc.

Anmerk. 2. Noch ein anderer sehr bedeutender Unterschied findet zwischen den β^m in (I und II) statt, daß nämlich im letzten Falle die gegebenen, von einander ganz unabhängigen, Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ der Reihe p (II) als veränderlich und von einander abhängig (8, 9) von ARBOGAST angesehen und behandelt werden. Diese Voraussetzung macht daher nach geendeten Differentiationen, bestimmte Substitutionen in $D. \beta; D^2. \beta; D^3. \beta \dots$ nöthig (20), die man am schicklichsten der derivativen Function in Form eines Zeigers untersetzen kann, wie oben (46, c). Man vergleiche (45, II) und die dortige Note.

Anmerk. 3. Das m in (I und II) kann jede Zahl, positive und negative, ganze und gebrochene, bedeuten; die Formeln in (46; b, c) sind nämlich für jeden Werth von m anwendbar. Setzt man aber das m in II einer ganzen positiven Zahl gleich: so giebt das die von ARBOGAST sogenannten *quantités polynomiales* (40), die Coefficienten nemlich der entwickelten

Potenzen ganzer positiver Exponenten der Polynomieu.

Anmerk. 4. Für bejahte positive m gilt ausser dem (Anm. 3) angeführten combinatorischen Werthe für $\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}$, auch nachfolgende verkürzte Formel:

$$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n} = p^m n(n+1) = m^{m+n} M$$

$$\left(\begin{array}{l} D \cdot \beta = 1 \gamma \\ D^2 \cdot \beta = 1 \cdot 2 \delta \\ D^3 \cdot \beta = 1 \cdot 2 \cdot 3 \varepsilon \\ \vdots \end{array} \right) p[\beta, \gamma, \delta, \dots] \left(\begin{array}{l} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots \\ 1, 2, 3, 4, \dots \end{array} \right)$$

wo für $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$

dann $M = A \quad B \quad C \quad D \quad \dots$

und $m = a \quad b \quad c \quad d \quad \dots$

zu setzen. Arch. der Math. Heft II. S. 230, 231.

III. Die Polynomialgrössen

$$D \cdot \xi^m, \frac{D^2 \cdot \xi^m}{1 \cdot 2}, \frac{D^3 \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, \frac{D^n \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}$$

lassen sich endlich auch als Zeichen von Combinationen betrachten. ARBOGAST bemerkt dieses [no. 54, 4°], behauptet aber [no. 52] die combinatorische Behandlung und Auflösung dieser Zeichen (z. B. nach den Formeln hier, Anmerk. 4; in 46, b, c ; und andern) sey weniger leicht und weniger analytisch als die derivative. Diesen Ausspruch gehörig zu prüfen, darf man nur die bereits vorgelegte combinatorische Evolutionsformel (39) und ihre Anwendung, mit der sogleich aufzuführenden, die Polynomialgrössen enthaltenden, derivativen Formel (53) und ihrem Gebrauche vergleichen.

VIERTER ABSCHNITT.

ARBOGAST's zweyte, die Polynomialgrößen enthaltende, derivative Auflösungsformel des Hauptproblems (20), aus der combinatorischen Localformel (43 und 52, II) abgeleitet.

53. Die von ARBOGAST [no. 20] vorgetragene zweyte Evolutionsformel ist folgende:

$$I. \quad \varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

==

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.} + A_n x^n$$

$$= \varphi \alpha$$

$$+ \frac{D\varphi\alpha}{1} \cdot \beta x$$

$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1} D\beta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot \beta^2 \right) x^2$$

$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1} \cdot \frac{D^2\beta}{1 \cdot 2} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot D\beta^2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \beta^3 \right) x^3$$

$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1} \cdot \frac{D^3\beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^2\beta^2}{1 \cdot 2} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot D\beta^3 \right.$$

$$\left. + \frac{D^4\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \beta^4 \right) x^4$$

, , , , , , , , , , ,

$$\text{also } A_n x^n = \left(\frac{D^n \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} \right) = \frac{D\varphi\alpha}{1} \cdot \frac{D^{n-1}\beta}{1 \cdot 2 \dots n-1} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} \cdot$$

$$\frac{D^{n-2}\beta^2}{1 \cdot 2 \dots n-2} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^{n-3}\beta^3}{1 \cdot 2 \dots n-3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{D^n \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{D^{n-n}\beta^n}{1 \cdot 2 \dots n-n} + \text{etc.}) x^n$$

für den derivativen Zeiger:

$$\left[\begin{array}{cccccc} D.\xi, & D^2.\xi, & D^3.\xi, & D^4.\xi, & D^5.\xi, & \dots \\ 1\gamma, & 1.2\delta, & 1.2.3\varepsilon, & 1.2.3.4\zeta, & 1.2.3.4.5\eta, & \dots \end{array} \right]$$

Der hier beygefügte derivative Index zeigt nemlich, was nach geendeten Derivationen, durch Differentiation,

bey den Polynomialgrößen $\frac{D^n.\xi^m}{1.2\dots n}$ (51, III) statt der

$D^1.\xi, D^2.\xi, D^3.\xi \dots$ zu setzen sey (45, II. Note).

Auch ist $\frac{D^{n-n}.\xi^n}{1.2\dots n-n}$ d. i. $\frac{D^0.\xi^n}{0} = \xi^n$.

II. Ordnete man die Glieder der Coefficienten, wie sie kommen würden, wenn man die hiesigen rückwärts schriebe, so fände man A_n oder

$$\begin{aligned} \frac{D^n.\phi\alpha}{1.2\dots n} &= \frac{D^n\phi\alpha}{1.2\dots n}.\xi^n + \frac{D^{n-1}\phi\alpha}{1.2\dots n-1}.D.\xi^{n-1} + \dots \\ &\quad + D\phi\alpha \frac{D^{n-1}.\xi}{1.2\dots n-1} \end{aligned}$$

diese derivativen Ausdrücke von ξ^n, ξ^{n-1} in combinato-
rische umzusetzen, dürfte man nur die zugehörigen $a^n A, b^n B, c^n C, \dots n^n N$ (56, III) rückwärts schreiben.

54. Beweis. Die Formel (52, II)

$$\frac{p^m n(n+1)}{p[\beta, \gamma, \delta \dots]} = \frac{D^n.\xi^m}{1.2\dots n}$$

wenn man darinn

für	nach und nach
$m=1$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \dots$
$m=2$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \dots$
$m=3$	$n=0, 1, 2, 3, 4 \dots$
.	.

setzt, giebt:

$p^1 \kappa 1 = \xi$	$p^2 \kappa 1 = \xi^2$	$p^3 \kappa 1 = \xi^3$	etc.
$p^1 \kappa 2 = D \cdot \xi$	$p^2 \kappa 2 = D \cdot \xi^2$	$p^3 \kappa 2 = D \cdot \xi^3$	etc.
$p^1 \kappa 3 = \frac{D^2 \cdot \xi}{1 \cdot 2}$	$p^2 \kappa 3 = \frac{D^2 \cdot \xi^2}{1 \cdot 2}$	$p^3 \kappa 3 = \frac{D^2 \cdot \xi^3}{1 \cdot 2}$	etc.
$p^1 \kappa 4 = \frac{D^3 \cdot \xi}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$p^2 \kappa 4 = \frac{D^3 \cdot \xi^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$p^3 \kappa 4 = \frac{D^3 \cdot \xi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	etc.
, ,	, ,	, ,	etc.

und so kommt, diese derivativen Ausdrücke an die Stelle der gleichgültigen localen, in die Localformel (43) substituirt, die Evolutionsformel (53). Die Vergleichung dieser Formel mit der combinatorischen (39) zeigt das Verhalten der derivativ- und combinatorisch ausgedrückten Polynomialgrößen mit einem Blick. Die allgemeine Formel dafür steht (52, II, Anmerk. 4); eine weitere Zerlegung der letztern (46, c).

55. Einen andern Beweis von dem Satze (53) vermöge der derivativ ausgedrückten Werthe der Potenzen $p^1, p^2, p^3, p^4 \dots$ (54) und der Substitution dieser Werthe in die einzelnen Glieder der Taylorischen Evolutionsformel, hat ARBOGAST (no 21) gegeben. Dieses Verfahren stimmt im Wesentlichen mit dem meinigen (in 42) überein, nur daß bey mir combinatorische Ausdrücke statt derivativer gebraucht werden, auch das dabey angewendete Verfahren (*Methodus potentiarum*) die weitläufige Substitution und Reduction ersparen hilft, und so die Glieder in (53) gleich gut geordnet giebt. Die derivative Form ist nämlich wenn man davon Gebrauch in der Anwendung machen will, keiner so unmittelbar leichten Auflösung fähig, als die combinatorische; obschon in [no. 52] das Gegentheil versichert wird. Mehr davon, im 6ten Abschnitte.

56. I. In dem Satze (53) kommen zweyerley derivativ ausgedrückte Gröſſen vor; die, von der Function $\phi \alpha$ abhängigen successiven ganz einfachen Derivationen $\frac{D^n \phi \alpha}{1, 2 \dots n}$ (ohne Punct nach D^n) für $D \alpha = 1$, also $D^2 \alpha = D^3 \alpha$, u. s. w. $= 0$; und die weit verwickeltern $\frac{D^n \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}$ (mit einem Puncte nach D^n), wo $D.\xi$; $D^2.\xi$; $D^3.\xi$; . . . und alle höhere Differentiale zugelassen werden (16). Die Werthe dieser Polynomialgröſſen für bestimmte n und m , durch wirkliche successive Differentiation und Substitution der zugehörigen Werthe für die $D.\xi$, $D^2.\xi$, $D^3.\xi$. . . (nach dem Zeiger in 53) suchen wollen, würde zu verdrüſſlichen und unübersehlichen Weitläufigkeiten führen (17).

II. Wie sich diese Schwierigkeiten, durch den Gebrauch combinatorischer Zeichen und Operationen beträchtlich vermindern lassen, zeigt die Formel (44, II) wenn man darinn β^m statt ϕx , und in den Zeiger, β statt x setzt. Auch wird (in V. a. a. O.) gewiesen, wie man durch eine schickliche Substitution der Werthe für $D.\xi$: $D^2.\xi$; $D^3.\xi$. . ., nicht in die Formel, sondern in den Zeiger, die Schwierigkeiten ganz aufheben könne. Dadurch wird man auf die combinatorische Formel (39) geleitet.

III. Man kann das auch so (ohne jene Sätze) in der Kürze übersehen. Man setze in die Gleichung (Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231, §. 7 und 8, II) überall D, β statt d, z , so erhält man

$$\frac{D^n \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{m^{m+n} M}{\left(\begin{array}{c} 1 \\ \xi, \end{array} \frac{2}{D.\xi}, \frac{3}{D^2.\xi}, \frac{4}{D^3.\xi}, \dots \right)}$$

den combinatorischen Ausdruck für die n^{te} *Derivée divisée* (34) $\frac{D^n \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}$, oder das n^{te} Differential von β^m ,

durch $1.2...n$ dividirt, worinu m und M allgemeine m^{te} Polynomialcoefficienten und Classen bedeuten; also (wie in 52, II, Anm. 4)

für $m = 1, 2, 3, 4 \dots$

dann $M = A, B, C, D \dots$

und $m = a, b, c, d \dots$

Nun setze man

für n	m	so findet man dadurch
erstens $n-1$	1	$\frac{D^{n-1} \cdot \xi}{1.2...n-1} = a^n A$
zweytens $n-2$	2	$\frac{D^{n-2} \cdot \xi^2}{1.2...n-2} = b^n B$
drittens $n-3$	3	$\frac{D^{n-3} \cdot \xi^3}{1.2...n-3} = c^n C$
viertens $n-4$	4	$\frac{D^{n-4} \cdot \xi^4}{1.2...n-4} = d^n D$
"	"	"
"	"	"
"	"	"
n tens $n-n$	n	$\frac{D^{n-n} \cdot \xi^n}{1.2...n-n} = n^n N$

wo also auch die

$a^n A \quad b^n B \quad c^n C \quad d^n D \dots n^n N$

auf den Zeiger

$$\left(\xi, \frac{D \cdot \xi}{1}, \frac{D^2 \cdot \xi}{1.2}, \frac{D^3 \cdot \xi}{1.2.3}, \frac{D^4 \cdot \xi}{1.2.3.4}, \dots \right)$$

sich beziehen und dadurch sich ausdrücken lassen.

Auch ist $n^n N = \frac{D^0 \cdot \xi^n}{0} = \xi^n$.

IV. Das giebt alle Bequemlichkeit, die man nur wünschen kann, in so fern ξ^m ein bloßes *Monomium* ist. Steht aber nach ARBOGAST's Zeichnung und Bedeutung (52, II, Anm. 1) ξ^m für $(\xi + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m$, so tritt hierbey zugleich die Nothwendigkeit der Sub-

stitution von 1γ ; 1.2δ ; $1.2.3\varepsilon$;... für $D.\xi$; $D^2.\xi$; $D^3.\xi$: ... (das. Anm. 2) ein; und so würde man in große Weitläufigkeit verfallen, wenn man diese Differentiale, nach obigem Zeiger, zuerst in $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$,... schaffen, und nachher jene Substitution darinn vornehmen wollte. Man macht diese Substitution vielmehr in jenen Zeiger selbst, und erhält dadurch

$$a^n A \quad b^n B \quad c^n C \quad d^n D \quad n^n N$$

auf den ganz einfachen Zeiger

$$\left(\begin{array}{cccccc} \xi & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & . & . & . \end{array} \right)$$

bezogen. Man vergleiche die Formel (52, II, Anm. 4)

V. Die $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, . . . für diesen einfachen Zeiger, kommen in der Formel (45, II) für den $(n+1)$ ten Coefficienten der Reihe für $\varphi(\alpha + \xi x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, vor. Setzt man darinn nach und nach $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ so erhält man die combinatorische Formel (39); und so auch die derivative (53) wenn man diese successiven Werthe von n , in das n der derivativen Ausdrücke (III) setzt. Die combinatorische Evolutionsformel läßt sich nicht weiter simplificiren, weil bey der übergroßen Leichtigkeit der Darstellung der Complexionen von $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, . . . nichts zu wünschen übrig bleibt. Man sehe den ersten Anhang.

V. Es ist übrigens bemerkenswerth, daß die Vermeidung der Schwierigkeiten, welche die derivativen Ausdrücke, durch continuirliche Differentiationen, auf welche sie hinweisen, hier in den Weg stellen, so gerade zu und ungezwungen auf combinatorische Verfahren führt; eine Bemerkung, die weiterhin von einer andern Seite neue Bestätigung erhalten wird.

FÜNFTER ABSCHNITT.

ARBOGAST's Auflösung seiner derivativen Evolutionsformel (53) führt auf Substitutionen. Die Weitläufigkeit dieses, von TETENS schon gebrauchten, Verfahrens wird aber zuletzt durch kurze, daraus abgeleitete, verbale Vorschriften (Règles) rein combinatorischen Inhalts wieder compensirt, und so die letztern statt der erstern gebraucht. Einige gemeinschaftliche Berührungspuncte des Derivationscalculus mit der combinatorischen Analysis.

57. Wie in der combinatorischen Analysis 1) spätere oder folgende Glieder und Coefficienten, aus frühern, unmittelbar vorhergehenden, sich ableiten, oder 2) für sich und ausser der Ordnung, von allen übrigen vorhergehenden (oder folgenden) unabhängig darstellen, und zwar, in beyden Fällen, bereits ganz reducirt und in der einfachsten Gestalt, anordnen lassen (29 und die dortige Note ⁹): so hat auch ARBOGAST diese Vollendung auf derivativen Wegen bey dem Gebrauche seiner Formel (53) zur Absicht gehabt. [no. 24. u. f. no. 40 u. f.]

A) *Derivative Ableitung folgender Coefficienten aus zunächst vorhergehenden, und umgekehrt.*

58. I. Dafür wird zuerst [no 24] eine leichte Regel aufgestellt, wie man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe (53) z. B. aus

$$\frac{D \varphi \alpha}{1} \cdot \frac{D^2 \xi}{1 \cdot 2} + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} \cdot D \xi^2 + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \xi^3$$

den unmittelbar folgenden

$$\frac{D \varphi \alpha}{1} \cdot \frac{D^3 \xi}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^2 \xi^2}{1 \cdot 2} + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot D \xi^3 \\ + \frac{D^4 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \xi^4$$

und so für jeden andern gegebenen Coefficienten den zunächst folgenden, deriviren könne,

II. In diesen Formeln machen die von $\varphi \alpha$ abhängigen einfachen Derivationen $\frac{D^n \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n}$ keine Schwierigkeit, wohl aber die verwickelten Polynomialgrößen $\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}$; wobey man durch fortgesetzte Differentiationen, und hinterher zu machende Substitutionen (56. I.) in verdrüßliche und gar bald unübersehbare Weitläufigkeiten gerathen würde. Wie sich diese Schwierigkeiten durch combinatorische Zeichnung und Verfahren gründlich heben lassen, ist ebendasselbst (II — V) gezeigt worden. ARBOGAST, der von combinatorischen Zeichen ganz abstrahirt, hat sich dabey verhalten, wie folget.

III. Die Polynomialgrößen, die ξ enthalten, zu entwickeln, vergleiche man ihren allgemeinen Ausdruck $\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}$, mit jenem $\frac{D^n \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n}$. Hier nun steht ξ statt α , der Exponent m statt des Functionalzeichens φ , und $\gamma = D \xi$ ist als das erste Glied des Polynoms $\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 + \text{etc.}$ anzusehen; und so folgt aus (53, I) diese erste Evolutions - Formel

$$\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n} = D \xi^m \cdot \frac{D^{n-1} \gamma}{1 \cdot 2 \dots n-1} + \frac{D^2 \xi^m}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^{n-2} \gamma^2}{1 \cdot 2 \dots n-2} + \text{etc.} \\ + \frac{D^{n-1} \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n-1} \cdot D \gamma^{n-1} + \frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n} \gamma^n$$

und, in dem besondern Falle, für $n=3$, ist

$$\frac{D^3. \xi^m}{1.2.3} = D \xi^m \cdot \frac{D^2. \gamma}{1.2} + \frac{D^2 \xi^m}{1.2} \cdot D. \gamma^2 + \frac{D^3 \xi^m}{1.2.3} \cdot \gamma^3$$

und die *Derivée* davon [no. 24]

$$\begin{aligned} \frac{D^4. \xi^m}{1.2.3.4} &= D \xi^m \cdot \frac{D^3. \gamma}{1.2.3} + \frac{D^2 \xi^m}{1.2} \cdot \frac{D^2. \gamma^2}{1.2} \\ &+ \frac{D^3 \xi^m}{1.2.3} \cdot D. \gamma^3 + \frac{D^4 \xi^m}{1.2.3.4} \cdot \gamma^4 \end{aligned}$$

In [dem obigen Werthe der schwierigen Derivation

$\frac{D^n. \xi^m}{1.2 \dots n}$, sind nun die Derivationen, die ξ enthalten,

$D \xi^m$, $\frac{D^2 \xi^m}{1.2}$, $\frac{D^3 \xi^m}{1.2.3}$, . . . alle leicht, und die Schwierigkeit ist auf die, die γ enthalten, $\frac{D^{n-1}. \gamma}{1.2 \dots n-1}$,

$\frac{D^{n-2}. \gamma^2}{1.2 \dots n-2}$, . . . übergetragen, aber auch da schon

um einen Grad vermindert, weil darunter $\frac{D^{n-1}. \gamma}{1.2 \dots n-1}$

die höchste ist.

IV. Eben so kann man, durch Vergleichung mit der Formel (III) vermöge einer daraus abgeleiteten

zweyten Evolution, die $\frac{D^{n-1}. \gamma}{1.2 \dots n-1}$, $\frac{D^{n-2}. \gamma^2}{1.2 \dots n-2}$, . . .

weiter in Derivationen, die γ und δ enthalten, zerlegen,

wo die $D \gamma^m$, $\frac{D^2 \gamma^m}{1.2}$, . . . alle leicht, und die

Schwierigkeiten, auf die die δ enthalten, wieder mit Verminderung eines Grades (die höchste Derivation ist

dann $\frac{D^{n-2}. \delta}{1.2 \dots n-2}$) übergetragen sind; und durch diese

stufenweise Verminderung werden endlich die Schwierigkeiten ganz aufgelöst.

V. Überhaupt stellt die obige Reductionsformel für

$\frac{D^n. \xi^m}{1.2 \dots n}$ in (III) die erste Evolution, in γ dar;

daraus folgt (IV) die zweyte, in δ ; und so die dritte, in ε ; und die vierte, in ζ ; u.s.w. indem man nach und nach $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$ statt β ; und $\delta, \varepsilon, \zeta, \eta \dots$ statt γ dabey braucht, und $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$ nach und nach als erste Glieder eines nach Potenzen einer veränderlichen Gröfse fortgehenden Polynoms betrachtet.

VI. Erste Evolution wird diejenige genannt, in welcher ein Buchstabe mehr vorkommt, als in der zu evolviren gegebenen Gröfse, wie oben die Derivation

$$\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}, \text{ worinn nur } \xi \text{ vorkommt, durch Derivatio-}$$

nen, worinn ξ und γ vorkommen, ausgedrückt wird. Eben so werden zweyte, dritte, vierte Evolution u.s.w. genannt, die zwey, drey, vier u.s.w. mit dem Zeichen D verbundene Buchstaben mehr enthalten. So wird man nach und nach von einer Evolution zur andern geleitet, wo immer mehr solcher Buchstaben zum Vorschein kommen, bis man, durch alle hindurch, endlich zur letzten gelangt, in welcher kein Buchstabe mehr mit dem Derivations - Zeichen D behaftet ist, sondern alles in $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$ in der einfachsten Gestalt und zugleich gut geordnet, ausgedrückt erscheint; weshalb diese Entwicklung auch die vollständige, ganz reducirte (*Développement complet, réduit*), genannt wird [no. 25]. Sie ist dieselbe, dem Ausdrücke und der Folge ihrer Glieder nach, auf welche die combinatorischen $a^n A, b^n B, c^n C \dots$ geradezu, ohne alle Umwege, führen.

VII. Die Evolution der Polynomialgrößen

$$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}, \frac{D^l \cdot \gamma^m}{1 \cdot 2 \dots l} \text{ hört mit dem Gliede auf, in welchem}$$

der zweyte Factor von dem Derivations - Zeichen D befreyt ist. So ist von $\frac{D^3 \cdot \xi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das letzte Glied der Evo-

lution, $\frac{D^3 \cdot \xi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \gamma^3$, und von der zu evolvirenden Gröfse

$\frac{D^4. \gamma^6}{1.2.3.4}$ das letzte Glied, $\frac{D^4. \gamma^6}{1.2.3.4} \cdot \delta^4$. Ferner
 $\frac{D^m \xi^m}{1.2...m} = \frac{D^m \gamma^m}{1.2...m} = \text{etc.} = 1$; auch $D\xi = D\gamma = D\delta$
 $= D\varepsilon = \text{etc.} = 1$; ingleichen $\frac{D^n. \gamma}{1.2...n} = \frac{D^{n-1}. \delta}{1.2...n-1} = \text{etc.}$
 folglich z. B. $\frac{D^4. \gamma}{1.2.3.4} = \frac{D^3. \delta}{1.2.3} = \frac{D^2. \varepsilon}{1.2} = D.\zeta = \eta$
 [no. 26]

VIII. So weicht ARBOGAST den schwierigen continuirlichen Differentiationen, auf welche die Ausdrücke
 $\frac{D^n. \xi^m}{1.2...n}$ hinweisen, [no. 17; 56, I] durch continuirliche, von der Reductionsformel (III) abhängige, Substitutionen aus, durch deren mehrmalige, nicht selten sehr vielfache, Anwendung man endlich zu ganz einfachen vollständig reducirten und gut geordneten Ausdrücken (Complexionen) gelangt (VI). In der Tafel zuletzt im zweyten Anhang dieser Abhandlung [auch no. 27. p. 20, 21] findet man der Gröſſen $\frac{D^5. \xi^4}{1...5}$

und $\frac{D^6. \xi^4}{1.2...6}$ successive Entwicklung oder Evolution in $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$ durch continuirliche Substitution, bis zur letzten vollständig reducirten, deutlich ausgeführt, so daß diese beyden Schemata die vollständigsten Belege für eine solche Behandlung abgeben. So weitläufig auch übrigens an sich diese Substitutionen wirklich sind, so sind sie es doch weniger, als die zugehörigen Differentiationen, und hinterher zu machende Austauschungen (II) an ihrer Stelle seyn würden.

59. Exempel zu (58)

Zu der ersten Evolution, in γ , der Gröſſe

$$\frac{D^6. \xi^4}{1.2...6} = D\xi^4. \frac{D^5. \gamma}{1.2...5} + \frac{D^2. \xi^4}{1.2} \cdot \frac{D^4. \gamma^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wie solche die Reductionsformel (58, III) für $n=6$ und $m=4$ giebt, die zweyte Evolution, in δ zu finden.

Hier ist klar, dafs man nur $\frac{D^5. \gamma}{1.2.3..5}$, $\frac{D^4. \gamma^2}{1.2.3.4}$ etc.

(die Ausdrücke mit einem Puncte nach D) weiter zu entwickeln braucht. Man setze also in (58, III)

1) $n=5$, $m=1$, statt ξ , γ aber γ , δ , so kommt

$$\frac{D^5. \gamma}{1.2..5} = D\gamma. \frac{D^4. \delta}{1.2.3.4} = \frac{D^4. \delta}{1.2.3.4} \quad (58, VII)$$

2) $n=4$, $m=2$, statt ξ , γ wieder γ , δ , so erhält man

$$\frac{D^4. \gamma^2}{1.2.3.4} = D\gamma^2. \frac{D^3. \delta}{1.2.3} + \frac{D^2. \gamma^2}{1.2} \cdot \frac{D^2. \delta^2}{1.2}$$

Die gefundenen Zerlegungen dieser beyden *Dérivées*, statt ihrer in die erste Evolution substituirt, giebt die zweyte, in δ

$$D\xi^4. \frac{D^4. \delta}{1.2.3.4} + \frac{D^2. \xi^4}{1.2} \left\{ \begin{array}{l} D\gamma^2. \frac{D^3. \delta}{1.2.3} \\ + \frac{D^2. \gamma^2}{1.2} \cdot \frac{D^2. \gamma^2}{1.2} \end{array} \right. + \text{etc.}$$

Man sehe die angef. Taf. im zweyten Anhang, auch [no. 27. p. 20]

60. Diese sinnreiche Deduction von derivativen immer einfachern Zerlegungen für die Polynomialgrößen aus einer einzigen Formel, ist gleichwohl nicht, wie es scheinen könnte, dem Derivations-Calcul ausschliesslich eigen. Derselben Substitutionen in Substitutionen zu demselben Zwecke, um alles dadurch zuletzt ganz einfach und gut geordnet, ausgedrückt, darzustellen, hat sich bereits der Etatsrath TETENS, in seiner *Formula Polynomiorum* (Sml I. S 1. f) bedienet. Mehrere Anwendungen dieses Verfahrens in verschiedenen Ex-

empeln, kommen (das. S. 15 — 21) vor; wobey noch zu bemerken, daß TETENS durchgängig bey den beyden ersten Classen: $a^n A$, $b^n B$, als für sich klaren, oder leicht erklärlichen und ihrem Werthe nach angeblichen (das. S. 9. §. 5) stehen bleibt, ARBOGAST hingegen durchaus alle mit dem Zeichen D behaftete Gröfsen zerlegt, bis dieser derivative Charakter ganz verschwunden ist. Eine sorgfältige Analyse des Tetenschen Verfahrens, mit Vergleichung und Reduction seiner Zeichen auf die combinatorischen, habe ich in den Anmerkungen zu jener Abhandlung an mehreren Orten, und noch ausführlicher (Ebendas. S. 250 — 254) im Zusammenhange vorgetragen. Hoffentlich wird die dort (S. 252) vorgelegte anschauliche Darstellung in meinen Zeichen, und deren combinatorische Auflösung (S. 253) viel dazu beytragen: TETENS Substitutionsmethode, und dadurch auch die ARBOGASTISCHE, in der Kürze zu übersehen.

61. Eine, der derivativen Reductionsformel (58, II) vollkommen gleichgültige und identische, folglich auch mit dem Tetenschen und Arbogastischen Substitutionsverfahren (60) übereinstimmende, combinatorische Formel, habe ich bereits vorlängst (*Nov. Syst. Perm. p. LV, 9*) nachgewiesen. Man vergleiche Sml. I. S. 236; Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231; oder hier (52, II, Anmerk. 4).

Es ist nämlich, für $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.} = p$, der $(n+1)^{\text{te}}$ Coefficient der ganzen positiven Potenz m von p , d. i. $p^m x (n+1)$, oder die m^{te} Combinations-Classe M zur Summe $m+n$ mit den zugehörigen Polynomial-Coefficienten m versehen, d. i.

$$m^m + nM = {}^m\alpha \beta^{m-1} a^n A + {}^m\beta \gamma^{m-2} b^n B + {}^m\gamma \delta^{m-3} c^n C + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{matrix} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots \\ 1, 3, 3, 4, \dots \end{matrix} \right) \quad \left(\begin{matrix} \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \dots \\ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \end{matrix} \right)$$

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomial-Coefficienten so groß wie m , oder die der Classe so groß wie n ist. Auch erhellet, daß diese Formel einzelne höhere Classen der Potenzen durch Summen von niedrigeren Classen giebt, eben so, wie die Derivations-Formel (58, III) einzelne höhere Derivationen durch Summen von niedrigeren ausdrückt.

62. Demnach ist (58, III)

$$\frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n} = m^m + n M$$

$$\left[\begin{array}{l} D \xi = 1 \gamma \\ D^2 \xi = 1 \cdot 2 \delta \\ \vdots \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \dots \\ 1, 2, 3, 4 \dots \end{array} \right)$$

ungleichen

$$D \xi^m \cdot \frac{D^{n-1} \gamma}{1 \cdot 2 \dots n-1} + \frac{D^2 \xi^m}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^{n-2} \gamma^2}{1 \cdot 2 \dots n-2} + \frac{D^3 \xi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^{n-3} \gamma^3}{1 \cdot 2 \dots n-3} + \text{etc.}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} D \gamma & D^2 \gamma & D^3 \gamma & D^4 \gamma \dots \\ 1 \cdot \delta & 1 \cdot 2 \cdot \varepsilon & 1 \cdot 2 \cdot 3 \zeta & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \eta \dots \end{array} \right]$$

==

$$m \alpha \xi^{m-1} a^n A + m \beta \xi^{m-2} b^n B + m \gamma \xi^{m-3} c^n C + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \end{array} \right)$$

und

$$\begin{array}{l|l} D^1 \xi^m = m \alpha \xi^{m-1} & \frac{D^{n-1} \gamma}{1 \cdot 2 \dots n-1} = a^n A \\ \frac{D^2 \xi^m}{1 \cdot 2} = m \beta \xi^{m-2} & \frac{D^{n-2} \gamma^2}{1 \cdot 2 \dots n-2} = b^n B \\ \frac{D^3 \xi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} = m \gamma \xi^{m-3} & \frac{D^{n-3} \gamma^3}{1 \cdot 2 \dots n-3} = c^n C \\ \vdots & \vdots \\ \frac{D^n \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n} = m \eta \xi^{m-n} & \frac{D^{n-n} \gamma^n}{1 \cdot 2 \dots n-n} = n^n N \end{array}$$

für denselben derivativen und combinatorischen Zeiger, wie gleich vorher.

Dies wäre also eine vollständige Vergleichung der derivativen und combinatorischen Reductionsformel (58, III und 61) und ihrer Elemente, nach welcher man eine sogleich in die andere umsetzen und verwandeln kann.

60. Es wird der Mühe werth seyn, auch eine vergleichende Darstellung der aus diesen Formeln fließenden Verfahren, von mir, von TETENS und von ARBOGAST vorzulegen. Ich will dazu den Arbogastischen

Ausdruck $\frac{D^5 \cdot \xi^4}{1 \cdot 2 \dots 5}$ (62, für $n=5$; $m=4$) gebrauchen, der mit meinem $\delta^9 D = \delta^4 + {}^5D$ gleichgeltend ist; der Zeiger sey wie am angef. O.

$$\text{Auflösung von } \frac{D^5 \cdot \xi^4}{1 \cdot 2 \dots 5} = \delta^4 + {}^5D = \delta^9 D$$

I. Nach HINDENBURGS Verfahren hat man die Wahl, ob man 1) die Entwicklung nach $\delta^9 D$
 $\left(\begin{matrix} \xi, \gamma, \delta \dots \\ 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \right)$
 ohne alle weitere Zerlegung in niedrigere Classen sogleich vornehmen; oder 2) dafür die Reductions-Formel (61, 62)

$$\begin{matrix} \delta^4 + {}^5D \\ \left(\begin{matrix} \xi & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \right) \\ == \end{matrix}$$

$$4A \xi^3 a^5 A + 4B \xi^2 b^5 B + 4C \xi^1 c^5 C + 4D \xi^0 d^5 D$$

$$\left(\begin{matrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \right)$$

gebrauchen; oder endlich 3) auch die Classen ${}^5A$, ${}^5B$, ${}^5C$, ${}^5D$, des letzten Ausdrucks noch weiter, mit gehöriger Abänderung des Zeigers, zerlegen will.

Im ersten Falle erhält man, wenn man die Complexionen von ${}^9D$, für den obigen Zeiger, eben so wie bey ${}^{10}D$ (Sml. I. S. 187, 188) für den dortigen ableitet:

$$\begin{matrix} {}^9D \\ \left(\begin{smallmatrix} \epsilon & \gamma & \delta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{smallmatrix} \right) \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} 4\epsilon^3\eta + 12\epsilon^2\gamma\zeta + 12\epsilon^2\delta\epsilon \\ + 12\epsilon\gamma^2\epsilon + 12\epsilon\gamma\delta^2 + 4\gamma^3\delta \end{matrix} \right\}$$

Im zweyten Falle, wo (nach obigem Zeiger) $a^5A = \eta$; $b^5B = 2\gamma\zeta + 2\delta\epsilon$; $c^5C = 3\gamma^2\epsilon + 3\gamma\delta^2$; $d^5D = 4\gamma^3\delta$; kommt

$$\begin{matrix} d^4 + {}^5D \\ \left(\begin{smallmatrix} \epsilon & \gamma & \delta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots \end{smallmatrix} \right) \end{matrix} = \left\{ \begin{matrix} 4\epsilon^3.\eta + 6\epsilon^2[2\gamma\zeta + 2\delta\epsilon] \\ + 4\epsilon[3\gamma^2\epsilon + 3\gamma\delta^2] + 4\gamma^3\delta \end{matrix} \right\}$$

Im dritten Falle könnte man die weitere Zerlegung so weit verfolgen, bis man alles in ersten und zweyten Classen ausgedrückt hätte, wie TETENS; oder man könnte alles bis aufs letzte zerlegen, wie ARBOGAST. Davon in den beyden sogleich folgenden Nummern (II, III).

II. TETENS Verfahren, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, würde für

$$\begin{matrix} d^4 + {}^5D \\ \left(\begin{smallmatrix} \epsilon, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \\ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{smallmatrix} \right) \end{matrix}$$

folgendes geben:

$$\begin{aligned} & 4A\epsilon^3.a^5A \\ & + 4B\epsilon^2.b^5B \\ & + 4C\epsilon^1.c^5C = 4C\epsilon^1. \left\{ \begin{matrix} 3A\gamma^2.a^2A \\ 3B\gamma.b^2B \end{matrix} \right\} \\ & + 4D\epsilon^0.d^5D = 4D\epsilon^0. 4A\gamma^3.a^1A \\ & \left(\begin{smallmatrix} \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \\ 1, 2, 3, 4, 5 \end{smallmatrix} \right) \quad \left(\begin{smallmatrix} \delta, \epsilon \\ 1, 2 \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

Setzt man nun statt der zwey letztern Ausdrücke linker Hand des Gleichheitszeichens, die gleichgültigen weitem Zerlegungen rechter Hand, so erhält man

$$\begin{array}{l} 4\mathfrak{A}\mathfrak{C}^3. a^5 A \\ + 4\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2. b^5 B \end{array} \left| \begin{array}{l} + 4\mathfrak{C}\mathfrak{C}^1. \left\{ \begin{array}{l} 3\mathfrak{A}\gamma^2. a^2 A \\ 3\mathfrak{B}\gamma. b^2 B \end{array} \right\} \\ + 4\mathfrak{D}\mathfrak{C}^0. 4\mathfrak{A}\gamma^3. a^1 A \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \\ 1, 2, 3, 4, 5 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \delta, \varepsilon \\ 1, 2 \end{array} \right)$$

alles in ersten und zweyten Classen: $a^5 A, b^5 B$; $a^2 A, b^2 B$; $a^1 A$; (deren Werthe oder Complexionen man sogleich übersieht,) ausgedrückt; und so kommt;

$$\delta^4 + 5\mathfrak{D} = \left\{ \begin{array}{l} 4\mathfrak{C}^3. \eta + 5\mathfrak{C}^2. [2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon] \\ + 4\mathfrak{C}^1. [3\gamma^2. \varepsilon + 3\gamma. \delta^2] + \gamma^3\delta \end{array} \right\}$$

(mit obigen Zeiger)

III. ARBOGAST's schon vorhin (58, III—VII; 59) erläutertes Verfahren, findet man namentlich für

$$\frac{D^5. \mathfrak{C}^4}{1.2..5} = \delta^4 + 5\mathfrak{D} = \delta^9 D \text{ in einer besondern Tafel}$$

im zweyten Anhang umständlich in 5 Columnen ausgeführt, welchem die 6te und letzte (das *Développement réduit* enthaltend) beygefügt ist. Ich muß auf diese Columnen hier verweisen. Die reducirten Glieder der letzten erscheinen genau in eben der Ordnung und Folge, wie bey mir und TETENS in (I, II). Ein ande-

res Beyspiel $\frac{D^6. \mathfrak{C}^4}{1.2..6} = \delta^4 + 6\mathfrak{D} = \delta^{10} D$ findet man in eben der Tafel von ARBOGAST ausgeführt. Für die combinatorische Entwicklung hätte man dafür wieder dieselbe dreyfache Wahl, wie in (I).

64. Die Tetensche Evolutionsformel (Sml. I, S. 13) für Potenzen, und die Arbogastische (53) überhaupt für Functionen der Reihen, setzen eine mehrmalige oft sehr vielfach wiederholte Zerlegung der Glieder oder

Coefficienten als Bedingung voraus (63, II). Bey der combinatorischen Evolutionsformel (39) hingegen ist es gleichgültig, ob man für die dortigen Polynomialgrößen $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, . . . die Reductions-Formel (61) überhaupt anwenden, nur einmal oder zu wiederholtenmalen anwenden, oder gar nicht gebrauchen will, weil die combinatorische unmittelbare Darstellung dieser Größen, ohne alle vorgängige weitere Zerlegung, nicht die geringste Schwierigkeit hat.

65. Für Complexionen also gegebener Combinations - Classen mit ihren Zahlen - Coefficienten nach der Reihe (wie man sie gewöhnlich braucht) bedarf es für diese Classen gar keiner weitem Zerlegung. Eine solche aber kann zu Erfüllung anderer Bedingungen nützlich seyn; z. B. wenn man von

$$e^{15} E = e^{5+10} E$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \xi & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \end{array} \right)$$

1) nur diejenigen Complexionen, in welchen ξ^3 und ξ^2 vorkommt, oder 2) diejenigen wissen wollte, die gar kein ξ enthalten, so würde die Zerlegung (Sml. I. S. 237)

$$52\xi^4 a^{10} A + 53\xi^3 b^{10} B + 5\xi^2 c^{10} C + 53\xi^1 d^{10} D + 5\xi^0 e^{10} E$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \end{array} \right)$$

zeigen, daß man für 1) nur $53\xi^3 b^{10} B + 5\xi^2 c^{10} C$; für 2) bloß $5\xi^0 e^{10} E$, nach dem untergesetzten Zeiger, zu construiren hätte.

66. Die beyden Beyspiele (65, und 63, I) zeigen, daß bey solchen Zerlegungen alles auf der gehörigen Zerfällung des Summenexponenten beruht. So wird für $e^{15} E$ der Summenexponent 15 in $5+10$ zerfällt, wo der eine (hier erste) Theil immer der Zahl der gegebenen Classe (hier 5, wegen E), der andere der Ergänzung (10, zu 15) gleich ist. Wie die bey-

den Zahlen 5 und 10 die Potenz- und Summenexponenten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...; von $\mathfrak{E}$; von $\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{b}B$, $\mathfrak{c}C$, ... (in 65) weiter bestimmen, fällt deutlich in die Augen; der zugehörige Zeiger, der vorher von β anfieng, fängt nun von γ an. Mehrere ausführliche Exempel (Sml. I. S. 190, 191; 237; 255). Die allgemeine Zerlegung nach m und n (hier 62).

67. Drückt man durch fortgesetzte Zerlegungen und Substitutionen mit TETENS alles in erste und zweyte Classen aus (63, II) oder löst man auch noch diese mit ARBOGAST auf (63, III), so ergeben sich auf diesem Wege die numerischen oder Polynomial-Coefficienten der Buchstabencomplexionen von selbst. Ich hingegen betrachte Litteralproducte und ihre Versezungszahlen, jede für sich unabhängig von solchen Zerlegungen. Dadurch wird die Auffindung der erstern erleichtert, und die Beyfügung der letztern, nach bekannten Regeln, hat keine Schwierigkeit (Sml. I. S. 61-63, Not. ⁱ u. ^k). Als Beyspiel zur Vergleichung kann

die derivaiive Entwicklung von $\frac{D^8 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 8} = \frac{D \varphi \alpha}{1} \cdot \frac{D^7 \cdot \mathfrak{E}}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 7}$
 $+ \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^6 \cdot \mathfrak{E}^2}{1 \cdot 2 \cdot \cdot 6} + \text{etc.}$ [no. 47. p. 39, 40] und die

gleichgültige combinatorische $\frac{D \varphi \alpha}{1} \mathfrak{a}^8 A + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} \mathfrak{b}^8 B$
 $+ \text{etc.}$ für den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{E}, \gamma \cdot \cdot \cdot 1 \\ 1, 2 \cdot \cdot \cdot 8 \end{smallmatrix} \right)$ dienen. Die Polynomialgrößen $\mathfrak{a}^8 A$, $\mathfrak{b}^8 B$, etc. stehen auch ausgeführt (*Infin. Dign. p. 167. Tab. V.*). Für die dortigen α , $\mathfrak{E}$, γ .. wären hier $\mathfrak{E}$, γ , $\delta \cdot \cdot \cdot 1$ zu setzen.

68. Nach TETENS gelangt man zu der letzten reducirten Evolution wirklich etwas geschwinder als nach ARBOGAST. Indessen überholt der Letztere den Erstern auf einem andern Wege sehr weit. TETENS nehmlich begnügt sich bey diesen zerlegenden Substitutionen stehen zu bleiben, und führt jede Polynomialgröfse durch

sie hindurch; ARBOGAST hingegen, dem die große Weitläufigkeit solcher derivirenden Zerlegungen, besonders für Glieder, die von dem ersten schon etwas entfernt sind, auffiel, hat sich ihrer blos als Mittel bedient, um kürzere und leichtere Regeln der Entwicklung daraus abzuleiten, und selbige nachher, statt jener weitläufigern Derivationen, zu gebrauchen. Es ist wichtig, diese Regeln genauer zu kennen, und mit den combinatorisch - involutorischen zu vergleichen.

69. ARBOGAST hat die successiven Evolutionen in $\gamma, \delta, \varepsilon \dots$ von zwey auf einander folgenden *Dérivées*

$$\frac{D^5. \xi^4}{1.2 \dots 5} \quad \text{und} \quad \frac{D^6. \xi^4}{1.2 \dots 6}, \quad \text{einzeln, (jede beson-}$$

ders) nach der Formel (57. III) berechnet und in einer Tafel [no. 27. p. 20, 21; hier zw. Anh.] aufgestellt, in welcher die gleichnamigen Evolutionen in verticalen Columnen über einander geordnet sind, um solche desto bequemer mit einander vergleichen zu können und daraus die Regel herzuleiten, wie jede untere Colonne, vorzüglich aber die letzte reducirte, aus der unmittelbar darüber stehenden obern sich deriviren lasse. In der combinatorischen Sprache: „Wie aus den gegebenen Complexionen einer Classe zur Summe n , die Complexionen derselben Classe, aber zur nächst höhern Summe $n + 1$ (hier, aus den Complexionen von $\delta^9 D$, die von $\delta^{10} D$) herzuleiten seyen.“

70. Es ist wesentlich nothwendig, wie auch [no. 28] erinnert wird, sich vorzüglich bey den reducirten Evolutionen der beyden letzten Columnen der Tafel, die das Zeichen D nicht weiter enthalten zu verweilen, und sie genau mit einander zu vergleichen. Aus solchen Vergleichen nun der über einander stehenden Columnen überhaupt, und der beyden letzten reducirten insbesondere [no. 27] und andern schon vorher gemachten Beobachtungen, wird der Schluß [no. 28] gezogen:

„Um die letzte reducirte Evolution der *Dérivée* in „(II) abzuleiten, hat man keine andere Derivationen „zu machen, als von den letzten Buchstaben aller Glieder (oder Complexionen) in (I) und von den vorletzten Buchstaben einiger dieser Complexionen; alle übrigen Buchstaben aber unverändert zu lassen.“

„Complexionen der letzten Art sind alle diejenigen, wo (wenn die Buchstaben nach ihrer Folge geordnet sind) der letzte Buchstabe der Complexion, oder eine Potenz desselben, den unmittelbar vorhergehenden Buchstaben des Alphabets, oder eine Potenz „oder Function dieses Buchstabens, zum Vorgänger „hat. w) Diese Complexionen sind die einzigen, welche zwey Derivationen zulassen; auch macht man sie „gleich auf der Stelle hinter einander.“

Wie die letzten reducirten *Dérivées divisées* in den eben erwähnten Fällen zu nehmen seyen, wird [no. 28, 29] nachgewiesen und ausführlich gerechtfertiget. Hier kann nur die aus den sämtlichen Beobachtungen gezogene Vorschrift [die *Règle* no. 30] angegeben werden.

Um aus den, nach der Folge der Buchstaben (das heist gut) geordneten Complexionen der Function

$\frac{D^n \cdot \phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n}$, die gleichfalls gut geordneten Complexionen von $\frac{D^{n+1} \cdot \phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n + 1}$ zu deriviren, verfährt man also:

w) In diesem Falle wären alle diejenigen Complexionen, wo in den beyden letzten Stellen zweyen nächst auf einander folgende Buchstaben, z. B. $\gamma \delta$, oder ihre Potenzen $\gamma^m \delta^n$ vorkämen; oder auch, wenn der vorlezte Buchstabe, wie bey den zur Form $\frac{D^m \cdot \phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots m} \cdot \beta^m$, gehörigen Gliedern, mit einem Functionalzeichen behaftet wäre.

1) „Man variirt in jeder Complexion der $\frac{D^n \cdot \phi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n}$ den letzten Buchstaben oder seine Potenz, indem man (ihn oder sie) differentiirt, und schlecht- hin β statt α ; γ statt β ; δ statt γ ; u. s. f. ohne weitere Coefficienten, als die Einheit, setzt.“

2) „Überdies variirt man auch noch den vorletzten Buchstaben, seine Potenz, oder seine Function, aber nur in denjenigen gut geordneten Complexionen, in welchen sein alphabetischer Nachfolger die nächste (also letzte) Stelle nach ihm einnimmt. Weil dadurch der Exponent der Potenz des letzten Buchstabens um eine Einheit vermehrt wird, so dividirt man durch den so vermehrten Exponenten.“

3) Giebt eine Complexion zwey Derivationen (2) so wird nach der aus (1) sogleich die aus (2) gesetzt.

Exempel zur Erläuterung der Regel, in Beziehung auf die beyden letzten Columnen der Tafel [p. 20, 21].

71. Um aus den gut geordneten Gliedern oder Complexionen (63):

$$4\epsilon^3 \cdot \eta + 6\epsilon^2 (2\gamma \cdot \zeta + 2\delta \cdot \epsilon) \\ + 4\epsilon (3\gamma^2 \cdot \epsilon + 3\gamma \cdot \delta^2) + 4\gamma^3 \cdot \delta$$

d. i. aus dem reducirten Werthe von $\frac{D^5 \cdot \epsilon^4}{1 \cdot 2 \dots 5}$, den

nächstfolgenden von $\frac{D^6 \cdot \epsilon^4}{1 \cdot 2 \dots 6}$ zu deriviren.

1) variire man die letzten Buchstaben dieser Glieder, indem man statt ihrer die nächstfolgenden setzt, und beobachte gehörig die Potenzen. Das giebt:

$$4\epsilon^3 \cdot \theta + 6\epsilon^2 (2\gamma \cdot \eta + 2\delta \cdot \zeta) \\ + 4\epsilon (3\gamma^2 \cdot \zeta + 3\gamma \cdot 2\delta \epsilon) + 4\gamma^3 \cdot \epsilon$$

2) Diejenigen Complexionen des obigen Ausdrucks, wo man noch überdies die vorletzten Buchstaben variiren muß, (70, 2) sind:

$$6\epsilon^2.2\delta.\epsilon + 4\epsilon.3\gamma.\delta^2 + 4\gamma^3\delta$$

und diese geben, durch eine zweyte Derivation, die Complexionen:

$$6\epsilon^2. \frac{2\epsilon\epsilon}{2} + 4\epsilon. \frac{3\delta\delta^2}{3} + \frac{4.3\gamma^2\delta\delta}{2}$$

welche, den übrigen vorher (in 1) gefundenen, in ihrer Ordnung beygefügt, den reducirten Werth von

$$\frac{D^6.\epsilon^4}{1.2..6}, \text{ d. i.}$$

$$4\epsilon^3.\theta + 6\epsilon^2(2\gamma.\eta + 2\delta.\zeta + \epsilon^2)$$

$$+ 4\epsilon(3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta\epsilon + \delta^3) + 4\gamma^3.\epsilon + 6\gamma^2.\delta^2$$

darstellen. [no. 28].

Ein Paar andere Beyspiele, die reducirten Werthe

$$\text{von } \frac{D^7.\epsilon^4}{1.2..7}, \frac{D^8.\epsilon^4}{1.2..8}, \text{ jeden aus dem unmittelbar}$$

vorhergehenden, abzuleiten [no. 29. p. 25]. Einige noch ausführlichere Anwendungen [no. 31 — 33].

72. Hier (70, 71) wird, wie bey combinatorischen Anordnungen, die alphabetische Ordnung der Buchstaben festgesetzt (vergleiche Note °); die Buchstaben der einzelnen Glieder nach ihrer Folge zu schreiben (was ich gut geordnet nenne) anbefohlen; auch auf Buchstaben aufmerksam gemacht, die, wie zwey nächste im Alphabet, unmittelbar auf einander folgen. Die letzten oder vorletzten Buchstaben der Complexionen variiren, heisst nichts anders, als sie gegen die nächstfolgenden des Alphabets oder Zeigers austauschen; und so ist die Vorschrift (71) aus den redu-

cirten Gliedern oder Complexionen von $\frac{D^5.\epsilon^4}{1.2..5}$ die

von $\frac{D^6.\epsilon^4}{1.2..6}$ zu deriviren, combinatorisch, und

mit dem Verfahren im ersten Anhang (3, I) „aus den Complexionen für ⁹D die für ¹⁰D herzuleiten“ selbst bis

auf die Ordnung, in welcher die Complexionen auf einander folgen, im Wesentlichen übereinstimmend. Nur der Umstand, daß ARBOGAST mit den Litteralproducten zugleich ihre numerischen Coefficienten bestimmt (67) macht einige darauf sich beziehende Zusätze der Regel nöthig, deren die einfachere combinatorische Deduction nicht bedarf; wo diese Zahlen den Buchstaben-Complexionen hinterher, nach einer leichten Regel, beygefügt werden (67).

73. Umgekehrt, aus den reducirten, gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n \cdot \varphi x}{1 \cdot 2 \cdot \dots n}$, die, von dem zunächst vorhergehenden $\frac{D^{n-1} \cdot \varphi x}{1 \cdot 2 \cdot \dots n - 1}$ zu deriviren.

Dafür wird [no, 36, p. 31] folgende Regel gegeben:

I. „Man werfe alle Complexionen weg, (man „übergehe sie) deren letzte Buchstaben auf eine höhere „Potenz, als die erste, erhoben sind.“

II. „In jeder Complexion, die auf einen einfachen „Buchstaben sich endigt, vertausche man diesen letzten „Buchstaben mit dem vorhergehenden im Alphabete.“

III. „Wo sich (aus II) eine neue Potenz bildet, „dividire man das Glied durch den Exponenten dieser „Potenz.“

Anm. Der dritte Theil der Regel geht blos auf die numerischen Coefficienten, die ich von den Litteralproducten abgesondert betrachte. Die übrigen beyden Theile stimmen genau mit meiner combinatorischen Regel (${}^nD$ aus ${}^{n+1}D$ z. B. ${}^9D$ aus ${}^{10}D$ abzuleiten, Erster Anh. 3, III. überein). Andere Worte; eine andere Ordnung der Sätze: der Inhalt aber der Regel, im strengsten Sinne des Worts, derselbe.

ARBOGAST nennt ein solches Verfahren *Dérivation inverse*, im Gegensatze mit jenem andern, *Dérivation directe* (71); daher auch seine *Dérivées directes et inverses*.

(B) *Derivative Darstellung jedes verlangten Gliedes, ausser der Ordnung, von allen andern (vorhergehenden und folgenden) unabhängig.*

74. Bisher (58 — 73) ist gezeigt worden, wie die Polynomialgrößen $\frac{D^{n-1}.G^m}{1.2\dots n-1}$, $\frac{D^n.G^m}{1.2\dots n}$ (die Combinationsclassen $m^{m+n-1}M$, $m^{m+n}M$) einander so bestimmen, daß, wenn der reducirte gut geordnete Werth der einen gegeben ist, der der andern sich daraus deriviren lasse; oder, in bestimmten Classen, wie

aus $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, $d^n D$, $e^n E$, ...

die $a^{n+1} A$, $b^{n+1} B$, $c^{n+1} C$, $d^{n+1} D$, $e^{n+1} E$, ...

und umgekehrt; überhaupt aus jeder gegebenen Classe zu einer bestimmten Summe, sich die gleichnamige Classe zu der um 1 verschiedenen Summe ableiten lasse.

Sucht man die Evolution der Glieder oder Coefficienten der gegebenen Function hinter einander, oder will man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe, den unmittelbar vorhergehenden oder folgenden bestimmen, so sind die Regeln dafür (71, 73) in der Anwendung [no 31 — 33] ganz bequem. Dennoch ist eine, von allen vorhergehenden und folgenden Coefficienten ganz unabhängige, Darstellung eines verlangten Coefficienten immer vorzüglicher, und gleichsam der letzte und höchste Zweck, worauf die combinatorische (und so auch die derivative) Analysis für diesen und ähnliche Fälle hinarbeitet.

75. In dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Coefficienten [no. 22]

$$\begin{aligned} \frac{D^n \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} &= \frac{D^n \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \xi^n + \frac{D^{n-1} \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n-1} \cdot D \cdot \xi^{n-1} \\ &+ \frac{D^{n-2} \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots n-2} \cdot \frac{D^2 \cdot \xi^{n-2}}{1 \cdot 2} + \text{etc.} + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^{n-2} \cdot \xi^2}{1 \cdot 2 \dots n-2} \\ &+ D \varphi \alpha \frac{D^{n-1} \cdot \xi}{1 \cdot 2 \dots n-1} \end{aligned}$$

der derivativen Evolutionsformel (53) ist die Folge der Polynomialgrößen, vorwärts gelesen,

$$\xi^n; D \cdot \xi^{n-1}; \frac{D^2 \cdot \xi^{n-2}}{1 \cdot 2}; \frac{D^3 \cdot \xi^{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \dots \frac{D^{n-1} \cdot \xi}{1 \cdot 2 \dots n-1}$$

rückwärts gelesen,

$$\frac{D^{n-1} \cdot \xi}{1 \cdot 2 \dots n-1}; \frac{D^{n-2} \cdot \xi^2}{1 \cdot 2 \dots n-2}; \frac{D^{n-3} \cdot \xi^3}{1 \cdot 2 \dots n-3}; \dots D \cdot \xi^{n-1}; \xi^n$$

Die damit verbundenen, mit dem Functionalzeichen

$$\text{behafteten Größen, } D \varphi \alpha, \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

hängen von successiven ganz einfachen Differentiationen ab. Ließen sich nun die obigen Polynomialgrößen, oder die combinatorischen

$$a^n A, b^n B, c^n C, d^n D, \dots n^n N$$

vorwärts und rückwärts eben so leicht successive von einander deriviren, so könnte man, auf einem doppelten Wege, zu jedem verlangten Coefficienten, ausser der Ordnung, von vorhergehenden oder folgenden Coefficienten unabhängig, gelangen, Dies führt auf folgende beyde Aufgaben:

76. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern

$$\text{von } \frac{D^n \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}, \text{ die, für } \frac{D^{n+1} \xi^{m-1}}{1 \cdot 2 \dots n+1} \text{ zu deriviren;}$$

oder, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Complexionen von $m^m + n^m M$ (der m^{ten} Combinationsclasse

zur Summe $m + n$) die Complexionen von $m^{m+n-1} M$ (der nächst vorhergehenden $(m-1)^{\text{ten}}$ Classe zu derselben Summe) beyde für den Zeiger $\begin{pmatrix} \xi, \gamma, \delta, \dots \\ 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$ abzuleiten.

Dafür giebt ARBOGAST [no. 43] folgende Auflösung (*Règle*):

I. „Man dividire den ganzen Ausdruck durch m , multiplicire jede Potenz von ξ durch ihren Exponenten und vermindere diesen Exponenten um 1; nicht zu vergessen, daß in den Gliedern, die kein ξ enthalten, dieser Exponent 0 ist.“

II. „Nach dieser Vorbereitung mache man die Derivationen nach der Regel [no. 30] oder hier (71).

„Einige Beispiele dazu [no. 44]

77. Die Vorbereitung in (76, I) geht ganz die numerischen Coefficienten der Litteralproducte oder Buchstabencomplexionen an, bis auf die Verordnung den Exponenten von ξ um 1 zu vermindern, welches meiner Wegnahme eines ξ , oder dessen Absonderung durch einen verticalen Strich, entspricht. Nach dieser Vorbereitung, welcher meine Darstellung nicht bedarf, wird sogleich die combinatorische Regel [no 30] oder hier (71) in Ausbung gebracht; wodurch das ganze Verfahren recht eigentlich combinatorisch wird. (Erster Anhang 5, IV). Das wird noch deutlicher aus der Arbogastischen Auflösung der folgenden Aufgabe, der umgekehrten von dieser, erhellen.

78. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$, die für $\frac{D^{n-1} \cdot \xi^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1}$ zu deriviren; oder, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Complexionen von $m^{m+n} M$ (der m^{ten} Combinationsclasse zur Summe $m+n$) die Complexionen von $^{m+1} m^{m+n} M$ (der nächst folgenden $(m+1)^{\text{ten}}$ Classe

zu derselben Summe) beyde für den Zeiger $\begin{pmatrix} \xi, \gamma, \delta, \dots \\ 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}$ abzuleiten;

ARBOGAST giebt davon [no. 47] folgende Auflösung (*Règle*).

I. „Man mache zuvörderst folgende Vorbereitung: Man erhöhe den Exponenten jeder Potenz von ξ um 1, daher man die Glieder, die kein ξ enthalten, mit ξ multipliciren muß; und mache die wegen dieser Erhöhung nöthige Veränderung der von den Potenzen von ξ herrührenden numerischen Coefficienten, indem man durch jeden so um 1 vermehrten Exponenten dividirt, und alle Glieder mit $m + 1$ multiplicirt.“

II. „Auf die so vorbereiteten Glieder wende man die Regel [no. 36] hier (73) an, so erhält man alle Glieder von $\frac{p^{n-1} \xi^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot n - 1}$, die ξ enthalten.“

III. „Um die Glieder zu haben, in denen ξ nicht vorkommt, vertausche man, in denjenigen der eben erhaltenen Glieder, wo nur die erste Potenz von ξ vorkommt, ξ mit γ , und dividire durch die Exponenten der neuen Potenzen die sich bilden; darauf wende man wieder die Regel [no. 36] an, so erhält man alle Glieder, worinn γ , aber kein ξ , vorkommt.

IV. „In denjenigen der eben (nach III) erhaltenen Glieder, worinn nur die erste Potenz von γ vorkommt, vertausche man γ mit δ , und wende von neuem die Regel [no. 36] an.“

V. „So fährt man fort, bis man Glieder erhalten würde, worinn der letzte Buchstabe ein früherer in der alphabetischen Ordnung seyn würde, als die vorhergehenden des Gliedes.

Exempel dazu [no. 47 und 49],

79. Hier einige diese Regel betreffende Bemerkungen:

Der Vortrag derselben sowohl, als die daraus folgende Entwicklung der Glieder, zeigen, mit Ausnahme dessen, was sich blos auf die Arbogastische Miterhaltung der numerischen Coefficienten bezieht, (die ich den Complexionen erst hinterher beyfüge) eine rein - combinatorische Anordnung in aller Form.

Die alphabetische Ordnung der Buchstaben von ε an, in Beziehung auf ihre respectiven Zahlenwerthe von 1 an x), dient dabey als Grundlage für die daraus zusammenzusetzenden Glieder. Zuerst werden die mit ε anfangenden (zur Ordnung ε gehörigen) Complexionen, durch Erhöhung des Exponenten von ε um 1, (durch Vorschreibung eines ε vor die gegebenen Complexionen) und Anwendung der Regel (73) aufgeführt (78, I, II); daraus werden durch Umtauschung von ε mit γ , und weitere Anwendung jener Regel, die mit γ anfangenden (die Ordnung γ ausmachenden) Complexionen gefolgert (78, III); und daraus weiter, durch Umtauschung von γ mit δ , und erneuerte Anwendung jener Regel, die mit δ anfangenden (zur Ordnung δ gehörigen) Complexionen (78, IV); u. s. w. die folgenden Ordnungen ε , ζ , η ... so lange das Umtauschen der Anfangsbuchstaben und die Anwendung jener Regel für die Endbuchstaben, statt findet; so lange nämlich durch Anwendung beyder Verfahren gut geordnete Complexionen (72) daraus folgen.

x) Il est nécessaire, de faire observer aux coefficients ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$) des puissances $x^0, x^1, x^2, x^3 \dots$ un certain ordre, par exemple, l'ordre alphabétique, ou de les marquer par des indices; il est avantageux, que le nombre qui exprime l'indice soit le même que l'exposant de la puissance de x à laquelle le coefficient appartient; also 0 für α , und 1, 2, 3, 4... für $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ respective [no. 9. p. 6, 7]. Man vergleiche die Note v.

Jedes einzelne Glied, dessen Anfangsbuchstabe durch Vertauschung gegen den nächstfolgenden des Alphabets in seinem Zahlenwerthe um 1 erhöht wird, wird in seinem Endbuchstaben, durch Anwendung der Regel (73), nach welcher man den nächst vorher gehenden dafür setzt, um eben so viel erniedrigt. Dadurch wird also den Complexionen immer dieselbe Summe erhalten; und da die Erhöhung durch Tausch nur die Anfangsbuchstaben betrifft, die keine höhere als die erste Potenz haben, (78, III, IV) und mit Veränderung der Endbuchstaben (73) nur so lange fortgefahren wird, als noch gleiche oder spätere Buchstaben auf frühere folgen: so kann auch keine Complexion entstehen, die nicht gut geordnet wäre (78, V). Und so werden denn durch die Auflösung (78) lauter gut geordnete Complexionen und Classen gefolgert, deren Glieder sämtlich zu derselben Summe gehören, und wie wachsende Zahlen (arithmographisch) fortgehen.

Hier ist also wieder die derivative Auflösung (78) mit der combinatorischen (Erster Anhang 5, III) vollkommen übereinstimmend und identisch. Man vergleiche die Anmerkung a. a. O. des Anhangs.

80. Diesem widerspricht nicht, was ARBOGAST (*Préf. p. V*) sagt: „*Je n'ai fait aucun usage des Combinaisons*.“ Er hat nämlich bey seinen Untersuchungen keine Combinationen zum Grunde gelegt; ist nicht von Combinationen ausgegangen; hat nichts von der dafür eingeführten Sprache gebraucht; seine successiven Derivationen haben ihn auf die ganz einfachen Regeln für die endlichen *Développemens réduits* geleitet —. Dafs aber gleichwohl eben diese Regeln, welche die Complexionen sogleich vollkommen reducirt, in der simpelsten Gestalt, und gut geordnet, darstellen; dafs diese so unentbehrlichen Regeln, die sich nicht weiter abkürzen lassen, sowohl dem Inhalte als der Ausführung nach, ganz combinatorisch und mit dem vor-

längst bekannten genau übereinstimmend sind, ist eben so gewiß; und so erhellet, daß die anfänglichen Schwierigkeiten des derivativen Verfahrens sich endlich in combinatorische Regeln auflösen, und dadurch sich gründlich heben und in der Kürze abthun lassen. Man kann diese Regeln nicht etwa zu den Berührungspuncten rechnen, von denen in der Vorrede [p. V.] erwähnt wird, daß die Derivationsmethode mit der combinatorischen einige solche Puncte gemein habe; denn sie betreffen gerade zu die Hauptsache, von der hier die Rede ist: „die prompte ganz einfache Entwicklung und Darstellung der Coefficienten der derivativen Evolutionsformel.“

81. Es giebt allerdings einige gemeinschaftliche Berührungspuncte beyder Methoden: die festgesetzte alphabetische oder numerische Anordnung der Buchstaben und Zahlen; die Beziehung der Exponenten der variablen Größen auf die Coefficienten der Glieder, in denen sie vorkommen (22 und die dortige Note); das Aufmerken auf Buchstaben in den Complexionen, die wie zwey nächste im Alphabet, unmittelbar auf einander folgen; das Austauschen der Anfangs- oder Endbuchstaben, zuweilen auch der vorletzten, gegen die zunächst folgenden oder vorhergehenden im Alphabet (72, 79). Da aber aus dieser gemeinschaftlichen Voraussetzung, durch das fortgesetzte derivative Verfahren am Ende keine andern als die obigen schon vorher bekannten combinatorischen Regeln abgeleitet werden: so erhellet daraus der wichtige Einfluß der Combinationen auf die Analysis überhaupt, und insbesondere der Vorzug der combinatorischen Evolutionsformel (39), welche die gesuchten Glieder *directe* und mit absoluter Leichtigkeit finden lehrt; da hingegen die derivative Formel (53) erst durch Umwege dahin gelangt. Das wird zugleich die Darstellung combinatorischer Anordnungen und Derivationen im ersten

Anhänge rechtfertigen. Ihre Unentbehrlichkeit bey dem Gebrauche der Evolutionsformeln, macht eine nähere Bekanntschaft mit derselben, in ihrer ursprünglichen ganz einfachen Gestalt, nothwendig und für mehrere Leser wiinschenswerth, denen es angenehm seyn wird, das Wenige, was hier zur Vergleichung nöthig ist, (die arithmographische Form derselben) im Buche selbst zu finden. Auswärtige der deutschen Sprache unkundige Liebhaber, werden über diese und andere combinatorische Regeln und Formeln, mit deren ganz kurzen Beweisen, in PFAFF'S *Disquisitionibus analyticis* (Tract. III. p. 260 — 333) ausführliche Belehrung finden.

82. Noch einen bedeutenden Vorzug behaupten diese Regeln in ihrem combinatorisch-involutorischen Gewande, dafs sie, so wie die Einsicht in ihre Gründe, so leicht sind, dafs einmal ein verdienter Analyst sogar behauptete, man könne sie, ohne alle Anweisung, getrost dem gesunden Menschenverstande überlassen; jeder, der ihrer nöthig hätte, werde sie leicht finden und gebrauchen. In der That ist auch die (besonders rein-) combinatorische Form diejenige, die in Absicht auf Zusammensetzung und Entwicklung der Elemente, allen andern an Simplicität weit vorgeht; welches vornehmlich, oder vielmehr ganz allein, auf dem Umstande beruht, dafs in der Combinationslehre gleich zu Anfange, ausser jenen Berührungspuncten (81), die Begriffe von „— Complexionen zu bestimmten Summen; von gut geordneten Complexionen, Ordnungen „und Classen, wo die Glieder arithmographisch oder „lexikographisch fortgehen, und was das für einen Einfluß auf die Veränderung der Buchstaben in den einzelnen Stellen habe; von combinatorischen Dependenz und den daher rührenden Involutionen und Evolutionen“ — aufgeführt und festgesetzt werden. Ganz anders verhält es sich mit der derivativen Ableitung

der so eben vorgetragenen Regeln für die sowohl abhängige als unabhängige Evolution der Polynomialgrößen, die, weil sie im Grunde combinatorischer Art sind, ohne combinatorische Begriffe dabey anzubringen, auch nicht in der Kürze sich abthun und rechtfertigen lassen. y)

SECHSTER ABSCHNITT.

Die combinatorische Evolution der Polynomialgrößen, auf dem directen Wege ist leichter, als die derivative Deduction derselben durch Substitutionen. Was ARBOGAST'N veranlaßet haben könne, das Gegentheil zu behaupten. Zwiefache combinatorische

Ansicht der derivativen Function $\frac{D^n, \xi^m}{1.2..n}$. KRAMP'S

combinatorische Integrale oder Aggregate. ROTHEN'S Versuch einer Theorie solcher Integrale.

82. Nach dem so eben Beygebrachten muß es nothwendig befremden, wenn in [no. 52] behauptet wird:

die Polynomialgrößen β^n ; D, ξ^{n-1} ; $\frac{D^2, \xi^{n-2}}{1.2}$; etc.

(meine $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, etc. $n^n N$) ließen sich auch combinatorisch ausführen, „quoique d'une façon moins facile et moins analytique. Über das

y) Quoique les règles de la méthode simplifiée soient très faciles, l'analyse qui y mène peut paroître un peu longue. Outre que j'ai donné le moyen d'abrégér cette analyse, j'observerai que l'apparence de longueur en doit être imputée en grande partie au soin que j'ai pris de tout démontrer et de ne rien passer de ce qui m'a paru propre à répandre quelque lumière. Calc. des Deriv. Préf. p. iv. Als Beispiele will ich hier blos anführen, was über die Développemens successives und ihre Rechtfertigung [p. 18 — 25]; ingleichen [p. 39 — 41] über die Regel [no. 47] beygebracht worden,

moins analytique in der Folge; zuörderst noch etwas die Beschuldigung des *moins facile* betreffend.

84. Wer noch zweifeln könnte, daß die Polynomialgrößen mit unübertrefflicher Leichtigkeit combinatorisch sich construiren und ausführen lassen, und daß die derivativen endlichen Darstellungen derselben (die *Développemens réduits*) keine andern, als combinatorische, sind: der dürfte nur den ersten Anhang zu dieser Abhandlung mit Aufmerksamkeit im Zusammenhange lesen, um sich vollkommen davon zu überzeugen. Auch ist wohl voritz die große Simplicität der combinatorischen Operationen allgemein anerkannt, und man giebt ohne Schwierigkeit zu, daß sie leichter sind, als die arithmetischen; daß Buchstaben sich leichter permutiren, combiniren, variiren, als Zahlen sich addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren lassen.

85. Wenn gleichwohl am a. O. [no. 52] behauptet wird, die combinatorische Anordnung und Darstellung der Polynomialgrößen sey weniger leicht, als die derivative so läßt sich die Veranlassung zu einem solchen Ausspruche aus Folgendem begreiflich machen. ARBOGAST sagt (*Préf. p. v*), um die Zeit, da er seine Untersuchungen angefangen habe, wären ihm meine Bezeichnungen und Verfahren wenig oder gar nicht bekannt oder geläufig (*familières*) gewesen; meine Schriften habe er bloß dem Titel nach gekannt; er habe seine eigenen Ideen verfolgt: und so ist es wohl möglich, daß ihm nur meine ersten frühern Verfahren nicht aber die spätern weit vollkommnern und mannichfaltigern, rein-combinatorischen Darstellungen, bekannt geworden sind. Ein Beleg zu dieser Conjectur scheint zu seyn, daß in dem ausführlichen Arbogastischen Werke, nur meiner ersten, vor mehr als zwanzig Jahren (1779) heraus gegebenen, noch sehr unvoll-

kommenen combinatorischen Schrift ^{z)} Erwähnung geschieht; die spätern aber, und in Absicht auf die verbesserte Methode und ihre weitere Anwendung, viel vorzüglichern α), ganz mit Stillschweigen übergangen werden.

86. Eine Bestätigung jenes Arbogastischen Ausspruchs (83) scheint selbst in der von ihm [no. 52, 53] aufgeführten Beschreibung des combinatorischen dop-

pelten Ausdrucks für die Polynomialgröße $\frac{D^n \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}$ enthalten zu seyn. Ich will die ganze Stelle wörtlich hier anführen:

I. Der Ausdruck $\frac{D^n \cdot \xi^m}{1 \cdot 2 \dots n}$ bedeutet den Coefficienten „des $(n+1)$ ten Gliedes der zu entwickelnden Potenz m „des Polynoms $\xi + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}$

„Wenn m eine ganze positive Zahl, so ist durch „die Theorie der Combinationen erweislich:

1) daß dieser nämliche Coefficient aus der Summe „aller Producte besteht, die durch

$$\xi^p \cdot \gamma^q \cdot \delta^r \cdot \varepsilon^s \dots$$

„sich können darstellen lassen, wo $p, q, r, s \dots$ ganze „positive Zahlen oder Null, und so beschaffen sind, daß

$$p + q + r + s \text{ etc.} = m,$$

$$q + 2r + 3s + \text{etc.} = n;$$

2) „daß jedes dieser Producte zum numerischen Coefficienten hat,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots m}{1 \cdot 2 \dots p \times 1 \cdot 2 \dots q \times 1 \cdot 2 \dots r \times 1 \cdot 2 \dots s \times \dots}$$

^{z)} *Infinitinomi Dignitatum — historia, leges ac formulae*; auf welche bald darauf (1781) die *primae lineae novi systematis Perm. Comb. et Variat.* folgten.

α) Namentlich die von mir heraus gegebenen Hefte des mathematischen Archivs, und die beyden Sammlungen combinatorisch-analytischer Abhandlungen.

„oder, welches auf eins hinaus läuft,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1.2\dots q \times 1.2\dots r \times 1.2\dots s \times \dots}$$

„Nimmt man nun, (wie EULER mehrmals gethan hat) $\int$ als Zeichen der Vereinigung mehrerer Glieder „oder Producte mit einander, so kann man den Coefficienten von x^n in der m^{ten} Potenz des obigen Polynoms, durch

$$\int \frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1.2\dots q \times 1.2\dots r \times 1.2\dots s \times \dots} \cdot \xi^p \cdot \gamma^q \cdot \delta^r \cdot \varepsilon^s \dots$$

„ausdrücken; und so ist denn

$$\frac{D^n \cdot \xi^m}{1.2\dots n} = \int \frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1.2\dots q \times 1.2\dots r \times 1.2\dots s \times \dots} \cdot \xi^p \cdot \gamma^q \cdot \delta^r \cdot \varepsilon^s \dots,$$

für $p + q + r + s + \text{etc.} = m,$

und $q + 2r + 3s + \text{etc.} = n;$

„das ist die Relation, die wir hier nachweisen wollten.

II. „Eine andere Art, jene derivative Polynomialgröße combinatorisch darzustellen, ist folgende:

„Nimmt man für die Buchstaben $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$ „die respectiven Zeiger-Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots$ oder, „drückt man jene Buchstaben durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$

aus: so deutet $\frac{D^n \cdot \xi^m}{1.2\dots n}$ die Summe aller Producte an,

„jedes zu m Buchstaben (wobey auch Wiederholungen „derselben Buchstaben verstattet sind), die sich verschiedenentlich dergestalt zusammen setzen lassen, daß „in jedem Producte die Summe der Zeigerzahlen von „allen Buchstaben, gleich $m + n$; wo noch jedem solchen Producte der numerische Coefficient, oder die „Zahl beyzufügen ist, welche die Menge der Versez-

„zungen ausdrückt, deren die Buchstaben des Products
 „(mit Rücksicht auf ihre Wiederholungen, wo derglei-
 „chen vorkommen) fähig sind.

„Durch Beyhülfe dieser Zeigerzahlen läßt sich das
 „Auffinden solcher Producte auf folgende, die Partition
 „der Zahlen betreffende, Frage zurück führen; Es ist
 „die ganze Zahl $m + n$ gegeben, man soll alle verschie-
 „dene Arten nachweisen, wie sich diese Zahl durch
 „Addition von m kleinern ganzen Zahlen, mit Wieder-
 „holungen, zusammen setzen lasse.

III. „Weil $\frac{m(m-1)(m-2)\dots(p+1)}{1.2\dots q \times 1.2\dots r \times 1.2\dots s \times \dots}$ für
 „das Product $\epsilon^p. \gamma^q. \delta^r. \epsilon^s. \dots$ die Menge der
 „Buchstabenversetzungen angiebt: so kann man da-
 „durch die numerischen Coefficienten oder Versetzungs-
 „zahlen für jedes Glied der Polynomialgrößen $\frac{D. \epsilon^{m-1}}{1}$;
 „ $\frac{D^2. \epsilon^{m-2}}{1.2}$; $\frac{D^3. \epsilon^{m-3}}{1.2.3}$; etc. verificiren. So z. B. wä-
 „re, für $\epsilon^3 \gamma^2 \delta^1$ die Summe der Exponenten
 „ $3 + 2 + 1 = 6 = m$, folglich $\frac{6.5.4}{1.2 \times 1} = 60$, die zu-
 „gehörige Versetzungszahl.“ So weit die Arbogasti-
 „sche hierher gehörige Stelle.

8-. Die doppelte combinatorische Ansicht für
 $\frac{D^n. \epsilon^m}{1.2\dots n}$ ist hier (86, I, II) sehr wahr und bündig dar-
 gestellt; aber eben diese Darstellung scheint auch jenen
 Ausspruch; „*moins facile*“ für Leser wenigstens,
 die mit der Combinationslehre nicht bekannt genug
 sind, zu bestätigen — wenn nicht zugleich die An-
 wendung combinatorischer Formeln und Verfahren (auf
 I und II) nachgewiesen, vornehmlich aber nicht deut-
 lich gezeigt wird, wie die Bedingungsgleichungen für

m und n (in I) combinatorisch sich behandeln lassen, und wie leicht ihre combinatorische Auflösung sey; denn das Verfahren dafür auf dem gewöhnlichen Wege führt allerdings zu verdrüsslichen Weitläufigkeiten. (Sml. I. S. 119, 120).

88. Am leichtesten läßt sich der (in 86, II) wörtlich angegebene Werth von $\frac{D^n. \xi^m}{1.2\dots n}$ in einer combinatorischen Formel darstellen, wenn man nur einige Begriffe von Combinationen hat.

Die Darstellung aller Producte, jedes zu m (auch wiederholten) Buchstaben, zur Summe $m+n$, für welche Producte die möglichen Versetzungen, nicht wirklich gemacht, sondern nur durch eine vorgesetzte Zahl, die ihre Menge ausdrückt, angegeben werden sollen, deutet offenbar auf die m^{te} Combinationsclasse, M , mit Wiederholungen, zur Summe $m+n$, mit beygefügtm Polynomialcoefficienten oder der Versetzungszahl m ; auf die Formel also,

$$\frac{D^n. \xi^m}{1.2\dots n} = m^{m+n} M$$

$$\left[\begin{array}{l} D. \xi = 1 \gamma \\ D^2. \xi = 1.2 \delta \\ \vdots \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{cccc} \xi & \gamma & \delta & \varepsilon \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \dots \end{array} \right)$$

wie sie bereits (62) ist aufgeführt worden.

89. Dieser Ausdruck durch m, M, m und n , nebst beygefügtm Zeiger, ist durchaus in meiner combinatorischen Zeichnung. Jener andere gleichviel bedeutende hingegen (86, I am Ende) mit den beyden Bedingungsgleichungen, ist, der äussern Form nach, ganz von dem meinigen, weniger aber von der gewöhnlichen algebraischen Sprache, verschieden. Solcher und ähnlicher Darstellungen hat sich neuerlich Prof. KRAMP

sehr scharfsinnig bedient β), und ihnen die Benennung combinatorischer Integrale oder Aggregate gegeben.

90. Was nun jenen Werth für $\frac{D^n \cdot G^m}{1 \cdot 2 \dots n}$ (86, I am Ende) anbetrifft, so fällt in die Augen, daß hier alles auf der Auflösung und Genügeleistung der beiden Gleichungen für m und n beruht, und daß man sich dabei um combinatorische Hülfe umsehen muß, wenn man nicht in Weitläufigkeit gerathen will; wie auch Professor KRAMP gethan, der durch seine combinatorischen Integrale und dafür angewandten Hülfsätze viel geleistet hat.

Bey der kurzen Übersicht des Wenigen, was eigentlich hieher gehört, will ich das von ARBOGAST a. a. O. aufgeführte Potenzen Product, auch hier beybehalten.

91. Bey jedem Producte von Potenzen, mit beygeschriebenen Zeiger- oder Stellen-Zahlen

$$\begin{array}{cccccc} \epsilon^p & \gamma^q & \delta^r & \epsilon^s & \zeta^t & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

lassen sich drey Dinge deutlich unterscheiden, und theils einzeln, theils verschiedentlich mit einander verbunden, in Betrachtung ziehen:

Die Exponenten	p	q	r	s	t	$\dots$
die Buchstaben	ϵ	γ	δ	ϵ	ζ	$\dots$
die Zahlen	1	2	3	4	5	$\dots$

Für die Bestimmung der $p, q, r, s, \dots$ von welcher hier eigentlich die Rede ist, will ich drey Falle aufführen, die sich als so viel verschiedene Aufgaben betrachten lassen.

β) Sml. I. S. 102 — 122; Sml. II. S. 341 — 366; KRAMP *Anal. des Refr. Astron. Chap. III.* Die Benennung combinatorische Integrale (Sml. II. S. 353, 363) combinatorische Aggregate (*Anal. des Refr. p. 73. no. 97*).

92. Es ist gegeben:

$$1) \quad p + q + r + s + t + \text{etc.} = m,$$

die Summe der Exponenten $p, q, r, s, t \dots$ der Buchstaben $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$, ohne Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \dots$;

$$\text{oder } 2) \quad 1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n,$$

die Summe der Vielfachen dieser Exponenten jener Buchstaben, in Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \dots$,

$$\text{oder } 3) \quad p + q + r + s + t + \text{etc.} = m,$$

$$1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n,$$

die Summe der Exponenten und ihrer Vielfachen, nach (1 und 2):

Man soll die möglichen Auflösungen, d. i. die zusammen gehörigen Werthe der $p, q, r, s, t \dots$ angeben, die diesen Gleichungen Genüge thun. Jede der Größen $p, q, r, s, t \dots$ kann eine ganze positive Zahl, oder auch 0, seyn.

93. Hier sind zwar die Gleichungen (1, 2, 3 in 92), als Bedingungsgleichungen, von dem Producte $\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \zeta^t \dots$ abgeleitet; man sieht aber ein, daß diese Gleichungen als unbestimmte, auch an sich betrachtet werden können, und daß ihre Beziehung auf ein solches Product keinesweges nothwendig, wohl aber in anderer Rücksicht nützlich und brauchbar ist.

Erster Fall (92, 1)

94. Aufgabe. Für die unbestimmte Gleichung

$$p + q + r + s + t + \text{etc.} = m$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe der $p, q, r, s, t \dots$ anzugeben.

Auflösung I. Die Anzahl oder Menge der $p, q, r, s, t \dots$ sey π , so fordert die Aufgabe, die Summe m aus π Zahlen, aber keinen andern als $0, 1, 2, 3, 4 \dots m$,

auf alle mögliche Arten zusammen zu setzen; und so hängt denn die Aufgabe von der π^{ten} Variationsclassen, Π , zur Summe m , für den Zeiger $0, 1, 2, 3 \dots m$,

also von $\overset{\dots s r q p}{m} \Pi$ $0, 1, 2 \dots m$ ab, die sich durch eine leichte Involution ergibt. (Zweyt. Anh.).

r	q	p	$\xi^p \gamma^q \delta^r$
0	0	4	ξ^4
0	1	3	$\xi^3 \gamma$
0	2	2	$\xi^2 \gamma^2$
0	3	1	$\xi^1 \gamma^3$
0	4	0	γ^4
1	0	3	$\xi^3 \delta^1$
1	1	2	$\xi^2 \gamma^1 \delta^1$
1	2	1	$\xi^1 \gamma^2 \delta^1$
1	3	0	$\gamma^3 \delta^1$
2	0	2	$\xi^2 \delta^2$
2	1	1	$\xi^1 \gamma^1 \delta^2$
2	2	0	$\gamma^2 \delta^2$
3	0	1	$\xi^1 \delta^3$
3	1	0	$\gamma^1 \delta^3$
4	0	0	δ^4
δ	γ	ξ	

95. Exempel. Für $m=4$ und p, q, r (wo $\pi=3$) wäre also die dritte Variationsklasse, C, zur Summe 4, mit Wiederholungen, für den Zeiger $0, 1, 2, 3, 4$, das ist $\overset{r q p}{4} C$ $(0, 1, 2, 3, 4)$ zu construiren.

Von den beyden combinatorischen Anordnungen, hier zur Seite, enthält die erste oder die Zahleninvolution zur Summe 4, die lexikographisch geordneten Variationscomplexionen, deren einzelne Zahlen die zusammengehörigen Werthe der über-

beschriebenen Exponenten p, q, r , d. i. die Exponenten der untergeschriebenen ξ, γ, δ , bestimmen. Beyder Verbindung giebt die zweyte Darstellung, wie sie hier unter $\xi^p \gamma^q \delta^r$ steht. Die Zahlen in der ersten sind variirt, die Buchstaben in der zweyten blos combinirt, auch sind die Buchstabencomplexionen einzeln gut geordnet, aber nicht in ihrer Folge, wie sie es seyn würden, wenn man der Zahlencolonne die Buchstaben ξ, γ, δ in dieser Ordnung unterschreiben, und die daher entstehenden Buchstabencomplexionen von unten herauf lesen wollte. Das führt auf folgende

96. Auflösung II. Man beziehe die $p, q, r, s \dots$ auf die $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ (92), so läßt sich beyder Verbindung durch folgende Formel ausdrücken:

$$\int [\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \dots] = 'M$$

$$p+q+r+s \dots = m \quad (\xi, \gamma, \delta, \varepsilon \dots)$$

wo der Ausdruck linker Hand des Gleichheitszeichens das combinatorische Integral, mit der Bedingungsgleichung; der Ausdruck rechter Hand, die m^{te} Classe der Combinationen an sich (*simpliciter*), mit Wiederholungen, für die Elemente $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ andeutet, deren Entwicklung die Zahlenwerthe der $p, q, r, s \dots$ in den einzelnen Complexionen zugleich aufführt.

Die Richtigkeit der Formel erhellt daraus, weil $\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \dots$ für $p+q+r+s \dots = m$, das allgemeine Glied der m^{ten} Classe, 'M, der Combinationen überhaupt, darstellt; so, daß jede aus m Buchstaben des Zeigers gegebene, Combinationscomplexion, durch gehörige Bestimmung der $p, q, r, s \dots$ sich daraus ableiten läßt.

Für das Exempel (95), wo $m=4=p+q+r$, wäre 'M = 'D. Die involutorischen Complexionen für diese Classe stehen (Sml. I. S. 174. β); man

darf nur, von den dortigen $aaaa$ an bis mit $cccc$, überall statt a, b, c hier ξ, γ, δ setzen.

97. Exempel 2. Für $p+q+r+s=2$, die möglichen zusammen gehörigen Werthe der p, q, r, s , sowohl an sich als in Beziehung auf die $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon$ anzugeben.

Hier ist $\pi=4$ und $m=2$: also

$$\prod_{(0, 1, 2 \dots m)}^{pqr \dots} = {}^2D_{(0, 1, 2)}^{pqr \dots} \quad \text{und} \quad \int [\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s] = 'B$$

$$p+q+r+s=2 \quad (\xi, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

Zweyter Fall [92, 2)

99. Aufgabe. Für die unbestimmte Gleichung

$$1p + 2q + 3r + 4t + \text{etc.} = n$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe der $p, q, r, s \dots$ anzugeben.Auflösung. Die Beziehung der $p, q, r, s \dots$ auf $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon \dots$ giebt das combinatorische Integral

$$\int [\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \dots] = {}^n J = {}^n \mathcal{J}$$

$$1p + 2q + 3r + 4s + \text{etc.} \quad \left(\begin{array}{c} \xi, \gamma, \delta, \varepsilon \dots \\ 1, 2, 3, 4 \dots \end{array} \right)$$

nachdem man die Complexionen arithmographisch oder lexikographisch entwickeln will. (Sml. I. 183).

Beyspiel, für $n=7$ oder ${}^7 \mathcal{J}$ (Samml. I. S. 200)und hier die Involution $\beta^{n-1} [\beta]$ etc. [Zweyter Anh.] das dortige $n=7$ gesetzt).

	1	2	3	4	5	6	7
	p	q	r	s	t	u	v
ξ^7	7	0	0	0	0	0	0
$\xi^5 \gamma^1$	5	1	0	0	0	0	0
$\xi^4 \delta^1$	4	0	1	0	0	0	0
$\xi^3 \gamma^2$	3	2	0	0	0	0	0
$\xi^3 \varepsilon^1$	3	0	0	1	0	0	0
$\xi^2 \gamma^1 \delta^1$	2	1	1	0	0	0	0
$\xi^2 \zeta^1$	2	0	0	0	1	0	0
$\xi^1 \gamma^3$	1	3	0	0	0	0	0
$\xi^1 \gamma^1 \varepsilon^1$	1	1	0	1	0	0	0
$\xi^1 \delta^2$	1	0	2	0	0	0	0
$\xi^1 \eta^1$	1	0	0	0	0	1	0
$\gamma^2 \delta^1$	0	2	1	0	0	0	0
$\gamma^1 \zeta^1$	0	1	0	0	1	0	0
$\delta^1 \varepsilon^1$	0	0	1	1	0	0	0
θ^1	0	0	0	0	0	0	1
	ξ	γ	δ	ε	ζ	η	θ
	1	2	3	4	5	6	7

Die Buchstabencomplexionen in der ersten Colonne sind lexikographisch geordnet gerade so, wie sie kommen würden, wenn man in der allgemeinen Formel (a. a. O.) $n=7$ setzte; wo also $\beta^{n-7}\theta$ d. i. $\epsilon^0\theta=\theta$ die letzte seyn würde.

Für die arithmographische Folge vor- und rückwärts, ist (Sml. I. S. 200)

$${}^nJ = \left\{ \begin{array}{l} {}^nA + {}^nB + {}^nC + {}^nD + {}^nE + {}^nF + {}^nG \\ {}^nG + {}^nF + {}^nE + {}^nD + {}^nC + {}^nB + {}^nA \end{array} \right\}$$

Die Classen rückwärts, aber ihre Complexionen vorwärts gelesen, geben das Krampische Zahlentäfelchen (Sml. II. S. 356) für die dortigen $\beta, \gamma, \delta, \dots \theta$, von dem hiesigen (in der zweyten Colonne) blos in der Ordnung etwas verschieden. Man vergleiche die ${}^nA, {}^nB, \dots {}^nG$ (*Infin. Dign. p. 167*) statt der dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ hier $\beta, \gamma, \delta, \dots$ gesetzt.

100. Im Zahlentäfelchen (99) sind die Zahlen zwischen $\epsilon, \gamma, \delta, \dots \theta$ und $p, q, r, \dots v$ die Exponenten der erstern und zugleich die Werthe der letztern: auch kommen die Stellenzahlen $1, 2, 3, \dots 7$ unter $\epsilon, \gamma, \delta, \dots \theta$, mit den Vielfachen über $p, q, r, \dots v$ überein. Die Exponenten der $\epsilon, \gamma, \delta, \dots$, mit ihren Stellzahlen multiplicirt, geben also so viel, als die Werthe der $p, q, r, \dots$ mit ihren Vielfachen; woraus die Richtigkeit der Auflösung (99) erhellet.

Eine Auflösung durch Variationscomplexionen, wie im ersten Falle (94, 95) würde wegen der mehreren Summen $n, n-1, n-2, \dots$ die man hier in Betrachtung zu ziehen hätte, in Weitläufigkeit führen. Die gegebene, durch blofse Combinationscomplexionen, ist äusserst leicht und kurz.

Dritter Fall (92. 3)

101. Aufgabe. Für die unbestimmten Gleichungen

$$\begin{array}{l} p + q + r + s + t + \text{etc.} = m \\ 1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n \end{array}$$

die zusammen gehörigen, beiden Gleichungen Genüge leistenden, Zahlenwerthe der p, q, r, s, t , etc. anzugeben.

Auflösung. Die Beziehung der $p, q, r, s, t \dots$ auf $\xi, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots$ giebt das combinatorische Integral

$$\int [\xi^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \zeta^t \dots] = {}^n M$$

$$p + q + r + s + t + \text{etc.} = m \quad \left(\xi, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \dots \right)$$

$$1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n \quad \left(1, 2, 3, 4, 5 \dots \right)$$

Das Integral mit den Bedingungsgleichungen führt also auf die m^{te} Combinationsklasse für den untergesetzten Zeiger. Nämlich die Gleichung für n , bestimmt ${}^n J$ (99). Von den Combinationsclassen ${}^n A, {}^n B, {}^n C \dots$ dieser Involution kann aber, wegen der Gleichung für m , nur die m^{te} Classe, das ist ${}^n M =$ statt finden,

Beyspiel. Für $m=6$ und $n=10$, wäre ${}^n M = {}^{10} F$, also, für obigen Zeiger,

	1	2	3	4	5	6
	p	q	r	s	t	u
$\xi^5 \zeta^1$	5	0	0	0	1	0
$\xi^4 \gamma^1 \varepsilon^1$	4	1	0	1	0	0
$\xi^4 \delta^2$	4	0	2	0	0	0
$\xi^3 \gamma^2 \delta^1$	3	2	1	0	0	0
$\xi^2 \gamma^4$	2	4	0	0	0	0
	ξ	γ	δ	ε	ζ	η
	1	2	3	4	5	6

Die Summe, 1) der Werthe der einzelnen $p, q, r \dots$ ist hier überall $= 6$; 2) und ihrer Producte $1p, 2q, 3r \dots$ überall $= 10$. Eben so das Krampische Zahlentäfelchen (Sml. I. S. 112).

102. Wären (in 101) die Bedingungsgleichungen

$$p + q + r + s + \text{etc.} = m$$

$$1q + 2r + 3s + \text{etc.} = n$$

gegeben (§6, I) so darf man nur, nach der zweyten Gleichung, ${}^nJ$ oder ${}^nJ$ entwickeln, und für jede Complexion der zusammengehörigen Werthe von $p, q, r \dots$ die Ergänzung zu m , als den Werth für p , hinzusetzen.

Exempel. Für $m = 10, n = 6$, wäre

$${}^6J = {}^6F + {}^6E + {}^6D + {}^6C + {}^6B + {}^6A, \text{ also}$$

	1	2	3	4	5	6	
p	q	r	s	t	u	v	
4	6	0	0	0	0	0	ξ^6
5	4	1	0	0	0	0	$\xi^4 \gamma^1$
6	3	0	1	0	0	0	$\xi^3 \delta^1$
6	2	2	0	0	0	0	$\xi^2 \gamma^2$
7	2	0	0	1	0	0	$\xi^2 \varepsilon^1$
7	1	1	1	0	0	0	$\xi^1 \gamma^1 \delta^1$
7	0	3	0	0	0	0	γ^3
8	1	0	0	0	1	0	$\xi^1 \zeta^1$
8	0	1	0	1	0	0	$\gamma^1 \varepsilon^1$
8	0	0	2	0	0	0	δ^2
9	0	0	0	0	0	1	ζ^1
	ξ	γ	δ	ε	ζ	η	
	1	2	3	4	5	6	

wie bey KRAMP (Sml. II. S. 364). Über die combinatorische Behandlung dieser und anderer ähnlichen Aufgaben (wie die in 92; 1, 2, 3) vergleiche man WEINGÄRTNERS Lehrb. der combin. Analysis. II Th. S. 133 f. f.

103. So viel hiervon, blos um zu zeigen, welche Erleichterung die Combinationslehre hier verschafft. Anwendungen solcher combinatorischen Integrale gehören nicht hieher; viele und vortreffliche hat Prof. KRAMP gegeben. Auch hat neuerlich Prof. ROTH eine Theorie der combinatorischen Integrale und ihrer Anwendung versucht. Ihr Umfang erstreckt sich weit,

und was mir davon von Zeit zu Zeit ist mitgetheilt worden, verdient große Aufmerksamkeit. Was man sich davon zu versprechen habe, mag folgender Auszug aus einem seiner neuesten Briefe aus Dresden darlegen.

„Ich habe wieder (schreibt er mir unterm 15. Jan. 1803) sehr viel an den combinatorischen Integralen gearbeitet, und ihre Theorie um ein Merkliches erweitert. Je weiter ich darinn fortschreite, desto mehr überzeuge ich mich von ihrer Wichtigkeit und Kraft. Durch sie ist es mir ganz neuerlich gelungen, die in §. VI. meiner Dissertation (*de Serierum Reversione*, 1793) gegebene allgemeine Summation, durch Zerlegung der Formel in ihre einfachsten Bestandtheile, ganz kurz zu erweisen. Allein ich mußte vorher die Betrachtung einer ganz besondern Art combinatorischer Integrale voraus schicken. Ich habe viel Neues dadurch in kurzer Zeit gefunden, und ich halte sie für so wichtig, als die Involutionen. Ich weiß es, ich sage viel, aber ich glaube, es beweisen zu können. Ich werde sie auf das sogenannte Erhöhungsproblem anwenden, und ich hoffe, durch sie in Stand gesetzt zu werden, dieses Problem (das aber immer nur ein specieller Fall oder Theil des weitläufigen und vielumfassenden Eliminationsproblems ist) vollständig auflösen zu können. Vorher will ich aber noch HAUBERS Aufsatz darüber (Sml. II. c. a. A. Seite 232, f.) durchgehen und damit vergleichen.“

„Sollte es nicht Zeit seyn, etwas darüber und über den Algorithmus, dessen diese neu gefundenen combinatorischen Integrale fähig sind, bekannt γ) zu ma-

γ) Das würde schon früher, in einem eignen Aufsätze zu diesen, geschehen seyn, der im Gefolge mehrerer, als dritte Sammlung comb. anal. Abhandlungen, oder als

chen? Ich bin gewiss überzeugt, sie werden die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich ziehen.“

„Zum Beweise, wie kurz durch sie gewisse Relationen oder Lehrsätze ausgedrückt werden können, führe ich nur die oben erwähnte Formel meiner Dissertation (§. VI) auf. Es ist nämlich das combinatorische Integral

$$\int \frac{s + \alpha c}{(f + \alpha d)(g - \alpha d)} \cdot q^{f + \alpha d} n(\alpha + 1) \cdot q^{g - \alpha d} n(\epsilon + 1) \\ \alpha + \epsilon = n \\ = \frac{s(f + g) + n(cf - ds)}{f(f + g)(g - nd)} \cdot q^{s + \epsilon} n(n + 1)$$

Die Bedingungsgleichung ist hier $\alpha + \epsilon = n$

„Als Beyspiele von neuen Wahrheiten, die ich durch meine combinatorischen Integrale gefunden habe, mögen folgende dienen. δ) — Nur eins läßt sich hier mittheilen: die Summation nämlich, der unendlichen von PFAFF summirten Reihe (Arch. der Math. 5tes Heft, S. 73 §. 12). PFAFF summirt nämlich die dortige Reihe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, vermittelt einer andern, wo eine neue Scale U vorkommt, deren allgemeine Dependenz von der Scale u durch die Formel $U n = n \cdot u \cdot n(n + 1)$ ausgedrückt wird. Ich habe aber gefunden, daß, wenn p, r, s willkührliche Scalen bedeuten, dann

$$(r p^f) n 1 (s p^g) n(n + 1) + (r p^{f + d}) n 2 (s p^{g - d}) n n \\ + (r p^{f + 2d}) n 3 (s p^{g - 2d}) n(n - 1) + \dots \\ + (r p^{f + nd}) n(n + 1) (s p^{g - nd}) n 1 = \frac{p^{f+g+1}}{p} \cdot rs) n(n + 1)$$

Beyträge dazu, erschienen seyn würden, wenn der so grofse Aufenthalt bey dem Druck, die Ausgabe nicht zu lange verzögert hätte.

δ) Sie waren in einer Beylage aufgeführt, und würden hier, theils zu weitläufig, theils, ohne beygefügte Erläuterung, nicht verständlich seyn. Nur eins davon kann ich hier mittheilen, und oben im Texte anführen.

welche Summation weit kürzer ist. P ist hier eine neue von p abhängige Scale, und die Dependenz derselben von der Scale p drückt die Formel

$$Pn(n+1) = (1 - nd)pn(n+1)$$

aus, das heißt, es ist

$$P[pn1, (1-d)pn2, (1-2d)pn3, (1-3d)pn4, \dots]$$

SIEBENTER ABSCHNITT.

Derivative und combinatorische Entwicklung der Producte zweyer oder mehrerer Polynomien, in Reihen, deren Glieder nach den Potenzen eines und desselben Buchstabens geordnet sind.

104. Ich werde mich über diesen Gegenstand, der mit dem vorigen in naher Verbindung stehet, kurz fassen, und will hier nur die einfachsten Reihen anführen. Es ist vortheilhaft, wie auch [no. 85] bemerkt wird, diesen Fall besonders abzuhandeln, theils, weil er sehr oft vorkommt, theils, weil er der Auflösung des verwickeltern allgemeinen Falls zum Grunde liegt und sie erleichtert.

I. Derivative Entwicklung der Producte mehrerer Reihen [no. 86 — 92].

Sie soll größtentheils mit den eignen Worten ihres Verfassers (in einer freyen Übersetzung) vorgetragen werden. Man kann sich nicht deutlicher darüber erklären, als es dort geschehen ist.

105. Aufgabe. Das Product einer beliebigen Anzahl von einander ganz unabhängiger Polynomien, deren jedes nach Potenzen von x geordnet ist, in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Um von dem einfachsten Fall anzufangen, suche man zuerst das Product von zwey Reihen

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times (\alpha + \epsilon x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$

in der angegebenen Gestalt zu entwickeln.

Die Multiplication beyder Reihen giebt folgende, nach Potenzen von x geordnete, Glieder

$$\begin{array}{c|c|c|c} a\alpha + a\epsilon & x + a\gamma & x^2 + a\delta & x^3 \\ + b\alpha & + b\epsilon & + b\gamma & + \text{etc.} \\ & + c\alpha & + c\epsilon & \\ & & + d\alpha & \end{array}$$

Das Gesetz der Gröſſen, die hier in die Potenzen von x multiplicirt sind, ist ganz einfach; der Coefficient jeder unbestimmten Potenz, x^n , läßt sich leicht daraus übersehen.

Um diese Auflösung auf Derivationen zurück zu führen, bemerke man, daß $b = D.a$, $c = \frac{D^2.a}{1.2}$,

$$d = \frac{D^3.a}{1.2.3}, \text{ etc.}; \epsilon = D.\alpha, \gamma = \frac{D^2.\alpha}{1.2}, \delta = \frac{D^3.\alpha}{1.2.3},$$

etc.; $A = a\alpha$, welches der Anfang (*Origine*) der Derivationen ist, $B = D.(a\alpha)$, $C = \frac{D^2.(a\alpha)}{1.2}$,

$$D = \frac{D^3.(a\alpha)}{1.2.3}, \text{ etc.}$$

Diese derivativen Ausdrücke statt der obigen Buchstaben gesetzt, geben

$$A = a\alpha$$

$$B = D.(a\alpha) = a.D.\alpha + D.a.\alpha$$

$$C = \frac{D^2.(a\alpha)}{1.2} = a.\frac{D^2.\alpha}{1.2} + D.a.D.\alpha + \frac{D^2.a}{1.2}.\alpha$$

$$D = \frac{D^3.(a\alpha)}{1.2.3} = a.\frac{D^3.\alpha}{1.2.3} + D.a.\frac{D^2.\alpha}{1.2} + \frac{D^2.a}{1.2}.D.\alpha \\ + \frac{D^3.a}{1.2.3}.\alpha$$

106. Lehrsatz. Es seyen a und α von einander unabhängige Größen, so wie ihre derivirten; die *dérivée divisée* (34) der Ordnung n des Products $a\alpha$, ist durch folgende Formel gegeben

$$\frac{D^n.(a\alpha)}{1.2..n} = a.\frac{D^n.\alpha}{1.2..n} + D.a.\frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} \\ + \frac{D^2.a}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \frac{D^3.a}{1.2.3}.\frac{D^{n-3}.\alpha}{1.2..n-3} + \text{etc.} \\ + \frac{D^{n-1}.a}{1.2..n-1}.D.\alpha + \frac{D^n.a}{1.2..n}.\alpha$$

wo, abgesehen von den Divisoren $1.2.3\dots$, die Glieder keine andern Zahlencoefficienten, als die Einheit haben.

107. Setzt man in diese Formel $n+1$ statt n , so kommt

$$\frac{D^{n+1}.(a\alpha)}{1.2..n+1} = a.\frac{D^{n+1}.\alpha}{1.2..n+1} + D.a.\frac{D^n.\alpha}{1.2..n} \\ + \frac{D^2.a}{1.2}.\frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{D^3.a}{1.2.3}.\frac{D^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} \\ + \frac{D^{n-1}.a}{1.2..n-1}.\frac{D^2.\alpha}{1.2} + \frac{D^n.a}{1.2..n}.D.\alpha + \frac{D^{n+1}.a}{1.2..n+1}.\alpha$$

Die Vergleichung dieser Formel mit der vorhergehenden, giebt folgende Derivationsregel

Aus den gegebenen Gliedern von $\frac{D^n \cdot (a\alpha)}{1 \cdot 2 \dots n}$, für

unabhängige a und α , die Glieder von $\frac{D^{n+1} \cdot (a\alpha)}{1 \cdot 2 \dots n + 1}$

abzuleiten: 1) variire man in jedem einzelnen Gliede bloß α oder seine *derivée*, und nehme davon die folgende *derivée divisée*, lasse aber a und seine *derivées* unverändert; 2) in dem einzigen Gliede, welches α und die höchste *derivée* von a enthält, variire man auch noch die *derivée* von a , und nehme davon die folgende *derivée divisée*; lasse aber den Factor α , wie er ist, unverändert.

Vermittelst dieser Regel findet man nach und nach, augenblicklich, aus $A = a\alpha$,

$$B = a\beta + b\alpha$$

$$C = a\gamma + b\beta + c\alpha$$

$$D = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha$$

$$E = a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha$$

u. s. w wie in (105).

Der Lehrsatz (106) und die obige Regel sind hinreichend, das Product oder jedes beliebige Glied des Products, jeder willkührlichen Menge von Polynomen zu entwickeln; wie aus folgender Anwendung auf Producte von drey und vier Polynomen deutlich erhellen wird.

108. Das Product von drey Polynomen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Das Glied ohne x , oder $A = a a \alpha$, ist der Anfang (*origine*) der Derivationen. Man sehe das Product $a a$ als eine einfache Gröfse p an, so, dafs $A = p \alpha$. Dadurch wird das Problem auf das vorhergehende zurückgeführt. Demnach ist (106)

$$A_n = \frac{D^n.(a a \alpha)}{1.2 \dots n} = \frac{D^n.(p \alpha)}{1.2 \dots n}$$

$$= \left(a a. \frac{D^n.\alpha}{1.2 \dots n} + D.(a \alpha). \frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2 \dots n-1} + \frac{D^2.(a \alpha)}{1.2} \cdot \frac{D^{n-2}.\alpha}{1.2 \dots n-2} \right.$$

$$\left. + \text{etc.} + \frac{D^{n-1}.(a a)}{1.2 \dots n-1} \cdot D.\alpha + \frac{D^n.(a a)}{1.2 \dots n} \cdot \alpha \right)$$

Die Gröfsen, zwischen den kleinen Parenthesen, sind hier der Regel (107) unterworfen.

Das giebt eine sehr leichte derivative Entwicklung der Glieder nach der Ordnung, und man findet augenblicklich

$$A = a a. \alpha$$

$$B = a a. \xi + (a b + b a) \alpha$$

$$C = a a. \gamma + (a b + b a) \xi + (a c + b b + c a) \alpha$$

$$D = a a. \delta + (a b + b a) \gamma + (a c + b b + c a) \xi$$

$$+ (a d + b c + c b + d a) \alpha$$

u. s. w. Es fällt in die Augen, dafs z. B. um E von D abzuleiten, man in D nur die $\delta, \gamma, \xi, \alpha$ mit $\varepsilon, \delta, \gamma, \xi$ respective vertauschen, und eine Derivation von der einzigen Gröfse $(a d + b c + c b + d a)$ machen dürfe, welche α multiplicirt.

109. Das Product von vier Polynomien

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

$$\alpha + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

$$\alpha + \xi x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Der Anfang der Derivation ist $A = \mathcal{A} a a \alpha$. Diesen zerfalle man in die beyden Factoren $\mathcal{A} a a$ und α , und betrachte $\mathcal{A} a a$ als eine einfache Gröſſe, so ist, nach dem Lehrsatz (106)

$$\frac{D^n}{1.2\dots n}(\mathcal{A} a a. \alpha) = \mathcal{A} a a. \frac{D^n. \alpha}{1.2\dots n} + D.(\mathcal{A} a a. \frac{D^{n-1}. \alpha}{1.2\dots n-1} \\ + \frac{D^2.(\mathcal{A} a a)}{1.2} \cdot \frac{D^{n-2}. \alpha}{1.2\dots n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathcal{A} a a)}{1.2\dots n} \cdot \alpha$$

wo man $D.(\mathcal{A} a a)$, $\frac{D^2}{1.2} \cdot (\mathcal{A} a a)$ etc., wie vorher gezeigt worden ist, entwickelt.

Durch Derivation findet man die Coefficienten der successiven Glieder der Reihe, wie folget:

$$A = \mathcal{A} a a. \alpha$$

$$B = \mathcal{A} a a. \beta + [\mathcal{A} a. b + D.(\mathcal{A} a). a] \alpha$$

$$= \mathcal{A} a a. \beta + [\mathcal{A} a. b + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) a] \alpha$$

$$C = \mathcal{A} a a. \gamma + [\mathcal{A} a. b + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) a] \beta$$

$$+ [\mathcal{A} a. c + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) b + (\mathcal{A} c + \mathcal{B} b + \mathcal{C} a) a] \alpha$$

$$D = \mathcal{A} a a. \delta + [\mathcal{A} a. b + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) a] \gamma$$

$$+ [\mathcal{A} a. c + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) b + (\mathcal{A} c + \mathcal{B} b + \mathcal{C} a) a] \beta$$

$$+ [\mathcal{A} a. d + (\mathcal{A} b + \mathcal{B} a) c + (\mathcal{A} c + \mathcal{B} b + \mathcal{C} a) b \\ + (\mathcal{A} d + \mathcal{B} c + \mathcal{C} b + \mathcal{D} a) a] \alpha$$

u. s. w. Mit gehöriger Aufmerksamkeit auf die Einklammerungen (*emboîtemens*) fährt man mit größter Leichtigkeit so weit fort als man will.

110. Zerlegte man $\mathcal{A} a a \alpha$ in die beyden Factoren $\mathcal{A} a$ und $a \alpha$, so fände man durch Derivation folgende, blos der Form nach von der vorhergehenden verschiedene, Entwicklung

$$A = \mathcal{A}a.a\alpha$$

$$B = \mathcal{A}a(a\beta + b\alpha) + (\mathcal{A}b + \mathcal{B}a)a\alpha$$

$$C = \mathcal{A}a(a\gamma + b\beta + c\alpha) + (\mathcal{A}b + \mathcal{B}a) \times \\ (a\beta + b\alpha) + (\mathcal{A}c + \mathcal{B}b + \mathcal{C}a)a\alpha$$

$$D = \mathcal{A}a(ad + b\gamma + c\beta + d\alpha) \\ + (\mathcal{A}b + \mathcal{B}a)(a\gamma + b\beta + c\alpha) \\ + (\mathcal{A}c + \mathcal{B}b + \mathcal{C}a)(a\beta + b\alpha) \\ + (\mathcal{A}d + \mathcal{B}c + \mathcal{C}b + \mathcal{D}a)a\alpha$$

u. s. w.

III. Man kann $\mathcal{A}a.a\alpha$ auf dreyerley Art in Factoren abtheilen: nämlich

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{D^n.(\mathcal{A}a.a\alpha)}{1.2\dots n} = \frac{D^n.(\mathcal{A}a.a\alpha)}{1.2\dots n} = \frac{D^n.(\mathcal{A}.a.a\alpha)}{1.2\dots n} \\ &= \mathcal{A}a.a \frac{D^n.\alpha}{1.2\dots n} + D.(\mathcal{A}a.a) \frac{D^{n-1}.\alpha}{1.2\dots n-1} \\ &\quad + \frac{D^2.(\mathcal{A}a.a)}{1.2} \cdot \frac{D^{n-2}.\alpha}{1.2\dots n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathcal{A}a.a)}{1.2\dots n} . \alpha \\ &= \mathcal{A}a \frac{D^n.(a\alpha)}{1.2\dots n} + D.(\mathcal{A}a) \frac{D^{n-1}.(a\alpha)}{1.2\dots n-1} \\ &\quad + \frac{D^2.(\mathcal{A}a)}{1.2} \cdot \frac{D^{n-2}.(a\alpha)}{1.2\dots n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.(\mathcal{A}a)}{1.2\dots n} . a\alpha \\ &= \mathcal{A} \frac{D^n.(a.a\alpha)}{1.2\dots n} + D.\mathcal{A} \frac{D^{n-1}.(a.a\alpha)}{1.2\dots n-1} \\ &\quad + \frac{D^2.\mathcal{A}}{1.2} \cdot \frac{D^{n-2}.(a.a\alpha)}{1.2\dots n-2} + \text{etc.} + \frac{D^n.\mathcal{A}}{1.2\dots n} . a.a\alpha \end{aligned}$$

III2. Nichts ist leichter, als jedes verlangte Glied, unabhängig von den vorhergehenden, durch Derivation zu entwickeln.

Exempel. Man verlangt das 5^{te} Glied des Products der Polynomien

$$A + B + C + \text{etc.}, \quad a + b + c + \text{etc.},$$

$$a + b + c + \text{etc.}, \quad \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.}$$

Hier ist $A = A a a a$, der Anfang der Derivation; das

5^{te} Glied wird durch $\frac{D^4. A a a a}{1.2.3.4}$ bezeichnet.

Eine erste Entwicklung giebt

$$A_4 = A a a. \varepsilon + D.(A a a) \delta + \frac{D^2.(A a a)}{1.2} \cdot \gamma$$

$$+ \frac{D^3.(A a a)}{1.2.3} \cdot \beta + \frac{D^4.(A a a)}{1.2.3.4} \cdot \alpha$$

und nun calculirt und derivirt man die Entwicklungen

von $D.(A a a)$, $\frac{D^2.(A a a)}{1.2}$, u. s. w. ohne Schwierig-

keit hinter einander, wie folget

$$D.(A a a) = A a. b + (A b + B a) a$$

$$\frac{D^2.(A a a)}{1.2} = A a. c + (A b + B a) b$$

$$+ (A c + B b + C a) a$$

$$\frac{D^3.(A a a)}{1.2.3} = A a. d + (A b + B a) c + (A c + B b + C a) b$$

$$+ (A d + B c + C b + D a) a$$

$$\frac{D^4.(A a a)}{1.2.3.4} = A a. e + (A b + B a) d + (A c + B b + C a) c$$

$$+ (A d + B c + C b + D a) b$$

$$+ (A e + B d + C c + D b + E a) a$$

So findet man für A_4 , ganz entwickelt,

$$A_4 = A a a. \varepsilon + [A a b + (A b + B a) a] \delta$$

$$+ [A a c + (A b + B a) b + (A c + B b + C a) a] \gamma$$

$$+ [A a d + (A b + B a) c + (A c + B b + C a) b$$

$$+ (A d + B c + C b + D a) a] \beta$$

$$+ [A a e + (A b + B a) d + (A c + B b + C a) c$$

$$+ (A d + B c + C b + D a) b$$

$$+ (A e + B d + C c + D b + E a) a] \alpha$$

113. Aus den generellen Formeln (106, 107) läßt sich noch nachstehende Regel folgern, um eine *dérivée divisée* aus der *dérivée divisée* der zunächst höhern Ordnung abzuleiten:

Um von der gegebenen Entwicklung von $\frac{D^n.(a\alpha)}{1.2..n}$ auf die von $\frac{D^{n-1}.(a\alpha)}{1.2..n-1}$ herabzusteigen, werfe man das Glied weg, worinn α mit der höchsten *dérivée divisée* von a multiplicirt ist, und vertausche in den übrigen Gliedern jede *dérivée divisée* von α , mit der zugehörigen *dérivée divisée* inverse. (73. p. 243).

Diese Regel gehörig ausgedehnt, erstreckt sich auf die *dérivées* eines Products von jeder willkührlichen Anzahl polynomischer Factoren; wie man finden wird, wenn man sie auf die Fälle (108, 109) anwendet und bemerkt, wie jede der Gröſsen $A, B, C, D, \dots$, aus der unmittelbar folgenden derivirt.

So weit der Arbogastische Vortrag. Ich gehe nun zu den combinatorischen Darstellungen fort.

II. Combinatorische Entwicklung der Producte mehrerer Reihen.

114. Vorerinnerungen.

1. Zwey, drey, vier oder mehrere Reihen multipliciren, heißt die möglichen Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. aus ihren Gliedern aufstellen. Eine gewisse Ordnung dabey zu beobachten, setze man die Glieder einer und derselben Reihe immer in eine und dieselbe Stelle der einzelnen Producte oder Complexionen.

2. Sollen die Glieder, wie hier erfordert wird (105) nach Potenzen einer veränderlichen Gröſſe (x) fortgehen, so können nur diejenigen Producte der Coeffi-

cienten der einzelnen Reihen, zu einer und derselben Potenz von x gehören, deren Zahlenwerthe, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, einerley Summe ausmachen.

3. Das führt, weil dabey Verwechselungen^{e)} vorkommen, auf Variationen zu bestimmten Summen, für bestimmte Reihen. Bezeichnet man nun die Variationsclassen nach der Ordnung durch große lateinische Curvibuchstaben, $A, B, C, D, \dots M$, setzt den Summenexponenten oben linker Hand zur Seite, die Reihenbuchstaben $p, q, r, s, \dots$ darüber und den Zeiger darunter: so sind Ausdrücke, wie folgende

$$\begin{array}{ccccccc} p q & p q r & p q r s & & p q r s t \dots & & \\ {}^5 B, & {}^6 C, & {}^{10} D, & \dots & {}^n M & & \end{array}$$

sehr verständliche Zeichen. Der Zeiger ist hier nicht beygefügt worden; er bezieht sich immer auf die Coefficienten der Reihen $p, q, r, s, \dots$ die für bestimmte Fälle bestimmt angegeben werden.

115. Aufgabe. Es sind mehrere, nach Potenzen von x geordnete, von einander unabhängige, Reihen $p, q, r, s, \dots$

$$\begin{array}{rcl} {}^1 A + {}^2 Bx + {}^3 Cx^2 + {}^4 Dx^3 + \text{etc.} & = & s \\ a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} & = & r \\ a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} & = & q \\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} & = & p \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

mit dem überschriebenen, allen Coefficienten gemeinschaftlichen Zeiger 1, 2, 3, 4 $\dots$ gegeben: man

^{e)} Denn, wenn in einer Classe, z. B. der dritten, die Complexion abc vorkommt, so müssen dariun auch die gleichnamigen (aus den ersten drey Buchstaben bestehenden) aber verwechselten acb, bac, cab, cba , vorkommen, weil diese, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, sämtlich zu einer und derselben Summe gehören.

verlangt das allgemeine $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der, gleichfalls nach Potenzen von x geordneten, Producte von zwey, drey, vier . . . m dieser Reihen. von den vorhergehenden niedrigern Producten und Gliedern, wie man will, abhängig oder unabhängig, darzustellen.

116. Auflösung. Diese geben die Variationsclassen nach der Reihe (114, 3). Es ist nämlich

$$\begin{array}{l} (qp) \rfloor (n+1) = n + {}^2B^{qp} x^n \quad | \quad (srqp) \rfloor (n+1) = n + {}^4D^{srqp} x^n \\ (rqp) \rfloor (n+1) = n + {}^3C^{rqp} x^n \quad | \quad (\dots srqp) \rfloor (n+1) = n + {}^mM^{\dots srqp} x^n \end{array}$$

(Der Zeiger ist hier wie in 115).

Die über die Classenzeichen $B, C, D, \dots, M$ geschriebenen Reihensbuchstaben $p, q, r, s, \dots$ zeigen zugleich die Stellen der Complexionen an, in die man, bey Entwicklung der Classen, die Coefficienten dieser Reihen zu setzen hat; z. B. hier, die Coefficienten aus p in die letzte; die aus q in die vorletzte; die aus r in die vorvorletzte u. s. w. Stelle der zusammengehörigen Complexionen der Classen. Dadurch wird die (in 114, I) empfohlene Ordnung beobachtet.

117. Beweis. Dafs für die $(n+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Producte aus zwey, drey, vier, . . . m Reihen immer x^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coefficienten in Beziehung auf den

Zeiger, bey zwey Reihen qp von ${}^2B^{qp} = a\alpha$, bey drey Reihen rqp von ${}^3C^{rqp} = a a \alpha$, bey vier Reihen $srqp$ von ${}^4D^{srqp} = \mathfrak{A} a a \alpha$, bey m Reihen . . . $srqp$ von ${}^mM^{\dots srqp} = \dots \mathfrak{A} a a \alpha$, an, und gehen bey ihnen die Summenexponenten der Classen (wie die Potenzexponenten von x) nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Folglich gehören für die $(n+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Producte der Reihen, die Variationsclassen mit ihren Summen,

exponenten und die Potenzen x^n , so zusammen, wie in (116) ist angegeben worden.

118. Setzt man in die allgemeinen $(n+1)^{\text{ten}}$ Glieder, nach und nach $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ so findet man dieser Producte einzelne Glieder nach der Ordnung, nämlich

$$\begin{aligned} qp &= {}^2 B + {}^3 B x + {}^4 B x^2 + {}^5 B x^3 + \text{etc.} \\ rqp &= {}^3 C + {}^4 C x + {}^5 C x^2 + {}^6 C x^3 + \text{etc.} \\ srqp &= {}^4 D + {}^5 D x + {}^6 D x^2 + {}^7 D x^3 + \text{etc.} \\ &\quad , \quad , \quad , \quad , \\ \dots srqp &= {}^m M + {}^{m+1} M x + {}^{m+2} M x^2 + {}^{m+3} M x^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hier gehen $m, m+1, m+2, \dots$ die Summenexponenten der Classen, und $0, 1, 2 \dots$ die Potenzexponenten von x , nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort (117).

119. Noch muß gezeigt werden, wie die Complexionen oder die einzelnen Glieder der Classen (116, 118) aus den Coefficienten der Reihen p, q, r, s zu den vorgeschriebenen Summen sich zusammen setzen lassen. Nachdem die Darstellung der Glieder einer verlangten Classe, auf andere vorhergegangene Beziehung hat oder nicht, nachdem wird auch die Aufgabe (115) abhängig oder unabhängig gelöst werden.

Zuförderst will ich eine so genannte independente ζ) Auflösung aufstellen, wodurch man jede verlangte Classe (jedes verlangte Glied eines Products der Reihen) ausser der Ordnung finden kann, ohne von den vorhergehenden Classen oder Gliedern etwas zu kennen, oder zu gebrauchen. Daraus werden sich, gleichsam von

ζ) Wegen solcher independenten Auflösungen vergleiche man Erst. Anh. 7 und die dortige Anmerkung.

selbst, mehrere Dependenz, folglich auch abhängige Auflösungen, ergeben.

120. Aufgabe. Die Complexionen einer beliebigen, auf die Reihen $p, q, r, s \dots$ (115) und den dortigen Zeiger bezogenen, Variationsklasse, z. B. ${}^{srqp}D$, ausser der Ordnung, und von vorhergehenden unabhängig, zu finden.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der vorgegebenen vierten Classe zur Summe 6 ist offenbar, in Zahlen 1113, in Buchstaben $\alpha a a \gamma$. Aus

s	r	q	p
α	a	a	γ
α	a	b	β
α	a	c	α
α	b	a	β
α	b	b	α
α	c	a	α
β	a	a	β
β	a	b	α
β	b	a	α
ϵ	a	a	α

dieser Anfangscomplexion fließen alle übrigen, wie folgt:

I. Das höchste der gegebenen Elemente, hier γ , aus der Reihe p , setze man als einzelnes Ding im Winkel.

II. Diesem höchsten Elemente γ setze man den ersten Coefficienten a aus q vor; dann vertausche man das so eben vorgesetzte Element mit dem nächst höhern, und das daneben stehende zweyte mit dem nächst niedrigern, und fahre so fort, bis das letzte Element α

wird, so erhält man die Binionen $a\gamma, b\beta, c\alpha$, im zweyten Winkel.

III. Den einzelnen Binionen in II setze man den ersten Coefficienten a aus r vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen; und daraus findet man weiter, durch Vertauschung des vorgesetzten Elements mit dem nächst höhern, und des letzten mit dem nächst niedrigern (mit Übergehung der Complexionen, die sich auf α endigen) die Ordnung b , und daraus auf eben die Art die Ordnung c , und so alle Ternionen $a a \gamma$, u. s. w. bis mit $c a a$, im dritten Winkel.

IV. Eben so (durch Vorsetzung des ersten Coefficienten $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{J}$, vor alle Ternionen, und durch gehörige Umtauschung der vorgeschriebenen und der letzten Buchstaben, nach III) geht man zu den Quaternionen und ihren Ordnungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, für die verlangte Classe fort; und so auch zu Verbindungen von mehr als vier Buchstaben, für höhere Classen, wenn dergleichen gefordert werden,

Beweis. Diese Auflösung ist keine andere, als die vorlängst bekannte Regel zu Auffindung der Variationscomplexionen zu bestimmten Summen, nur auf mehrere Reihen $p, q, r, s \dots$ angewendet (Samml. I. S. 187; 49. vergl. S. 171; 24 und S. 186; 47). Man verfährt nämlich so, als ob nur eine Reihe gegeben wäre, setzt aber für die Buchstaben dieser einen Reihe, nach und nach die gleichnamigen Buchstaben der verschiedenen Reihen in die ihnen zugehörigen Stellen (116). Ein hierher gehöriges Beyspiel für eine Reihe, aber in Zahlen 0, 1, 2 ist schon (97) da gewesen

121. Die Winkel, wie hier geschehen, zu ziehen, ist eben nicht nothwendig; wohl aber bequem, und wegen Nachweisung der Involutionen nützlich. Nämlich: aus der Union γ im ersten Winkel, deriviren die Binionen im zweyten; daraus die Ternionen im dritten Winkel; und daraus zuletzt die Quaternionen der verlangten Variationsclasse. Vergleicht man die hier (120) gefundenen Complexionen mit dem Werthe von $\mathfrak{C}$ bey ARBOGAST (109), so findet man bey beyden die Ordnung verschieden. Lieset man aber meine Complexionen vorwärts, von der ersten bis zur letzten herunter, die Arbogastischen rückwärts, von der letzten bis zur ersten herauf, so zeigt sich dabey die merkwürdige Erscheinung, daß beyde Darstellungen, die meinige von oben herunter, die Arbogastische von unten herauf, involutorisch sind. Das wird

aus folgenden beyden Beyspielen, durch unmittelbare Nebeneinanderstellung der Complexionen, und Ziehung der Involutionswinkel noch deutlicher erhellen.

122. Aufgabe. Den vierten Coefficienten des Products s, r, q, p , oder ${}^{srqp}D$ involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der verlangten Classe und Summe ist $\mathcal{N}a a \delta$. Hier kommt also δ an die Stelle von γ in (120, I); und wenn man das dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man meine Involution C, wie solche der Arbogastischen A gegenüber (im zweyten Anhang, Tafel IV) involutorisch entwickelt ist. Zwischen beyden liegt die Zahleninvolution B, zu beliebiger Vergleichung mit meiner Buchstabeninvolution C. Ich habe dazu die Tafel IV des zweyten Anhangs gewählt, weil sich dort alles bequemer neben einander stellen und mit einander vergleichen läßt. Die Erscheinung wegen der beyderley Involutionen nach entgegengesetzter Richtung (121), wie auch die gezogenen Winkel nachweisen, ist dort unter den beyden Anordnungen A, C bemerkt.

123. Setzt man bey Entwicklung der Complexionen anstatt sie, wie bey C, unter einander zu schreiben, selbige in die figürliche Anordnung D, (a. a. O.) neben und unter einander, wie ich bereits im *Nov. Syst. Permutt.* p. LXXV gethan habe: so ist diese Darstellung, beydes, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet, und mehrere, gemeinschaftliche Factoren, Zerlegungen und Dependenzien fallen dabey von selbst in die Augen. So übersieht man z. B. sogleich:

I. Dafs

$${}^{srqp}D = {}^{srq}C.\delta + {}^{srq}C.\gamma + {}^{srq}C.\beta + {}^{srq}C.\alpha$$

Ein Satz, der sich sogleich und ohne Schwierigkeit, für jede Classe und jede Summe allgemein ausdrücken läßt; wobey man mit Nutzen meine Distanzexponenten an-

wenden, und $\beta = \overset{1}{\alpha}$, $\gamma = \overset{2}{\alpha}$, $\delta = \overset{3}{\alpha}$, etc. setzen kann. Wollte man ferner,

II. Das Product $srqp$, wie es hier in I durch $srq.p$ ausgedrückt ist, durch $sr.qp$ ausdrücken, so könnte das so geschehen, wie es (a. a. O.) unter der figürlichen Anordnung D angegeben worden. Es ist nämlich in combinatorischen Zeichen

$$\overset{srqp}{7}D = \overset{sr}{2}B.\overset{qp}{5}B + \overset{sr}{3}B.\overset{qp}{4}B + \overset{sr}{4}B.\overset{qp}{3}B + \overset{sr}{5}B.\overset{qp}{2}B$$

Diese Formel gibt den Werth von D bey ARBOGAST (110).

124. Aufgabe. Den fünften Coefficienten des Products $srqp$, oder $\overset{srqp}{8}D$, involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste, gut geordnete Complexion der verlangten Classe und Summe ist $\alpha a a s$. Hier steht also s an der Stelle von γ (in 120, I), und wenn man das dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man (Zw. Anh. Taf. IV) meine Involution G , der Arbogastischen E gegenüber. Zwischen beyden liegt die Involution F , wie sie nur für eine Reihe p kommen würde, zu beliebiger Vergleichung mit meinem G für mehrere Reihen p, q, r, s . Die figürliche Anordnung H ist wie im *Nov. Syst. Perm.* p. LXXV, C. Was übrigens (in 123, I, II) bemerkt worden ist, findet auch hier seine Anwendung. Die derivative Aufsuchung dieses Gliedes hat ARBOGAST (112) als ein Beyspiel eines independenten Verfahrens aufgestellt. Nach der Zerfällung in (123, I) ist

$$\overset{srqp}{8}D = \overset{srq}{3}C.s + \overset{srq}{4}C.\delta + \overset{srq}{5}C.\gamma + \overset{srq}{6}C.\beta + \overset{srq}{7}C.\alpha$$

Ich habe die Aufgaben (120, 122, 124) mit Fleiß gewählt und auf einander folgen lassen, um den invo-

tutorischen Gang daran zu erläutern, weil Classen mit steigenden Summenexponenten am besten dazu geeignet sind.

Hier noch einige Vergleichung der derivativen und combinatorischen in diesem Abschnitte vorkommenden Zeichen.

125. Es ist

$$\begin{array}{l|l} a = D^0. a = a^0 & d = \frac{D^3. a}{1.2.3} = a^3 \\ b = D. a = a^1 & \\ c = \frac{D^2. a}{1.2} = a^2 & a = \frac{D^n. a}{1.2.3..n} = a^n \end{array}$$

Die kleinen Zahlen über a sind meine Distanzexponenten,

und $a^n = \frac{D^n. a}{1.2.3..n}$ bedeutet also den $(n+1)^{\text{ten}}$

Buchstaben, vom Anfange an, a als den ersten gezählt.

126. Für zwey Reihen qp (115) ist

$$\begin{aligned} (a\alpha) &= (qp)_{\mathfrak{N}1} = {}^{\mathfrak{qp}}B = a\alpha \\ D.(a\alpha) &= (qp)_{\mathfrak{N}2} = {}^{\mathfrak{qp}}B = a\beta + b\alpha \\ \frac{D^2.(a\alpha)}{1.2} &= (qp)_{\mathfrak{N}3} = {}^{\mathfrak{qp}}B = a\gamma + b\beta + c\alpha \\ \frac{D^3.(a\alpha)}{1.2.3} &= (qp)_{\mathfrak{N}4} = {}^{\mathfrak{qp}}B = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha \\ &= \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \\ \frac{D^n.(a\alpha)}{1.2.3..n} &= (qp)_{\mathfrak{N}(n+1)} = {}^{\mathfrak{qp}}B \\ &= a\alpha + a\alpha + a\alpha + \text{etc.} + a\alpha + a\alpha \end{aligned}$$

127. Für drey Reihen rqp (115) ist

$$(aa.\alpha) = (rqp)_{\mathfrak{n}1} = {}^{rqp}_3C = {}^{rq}_2B\alpha$$

$$D.(aa.\alpha) = (rqp)_{\mathfrak{n}2} = {}^{rqp}_4C = {}^{rq}_2B\beta + {}^{rq}_3B\alpha$$

$$\frac{D^2.(aa.\alpha)}{1.2} = (rqp)_{\mathfrak{n}3} = {}^{rqp}_5C = {}^{rq}_2B\gamma + {}^{rq}_3B\beta + {}^{rq}_4B\alpha$$

= = = = = =

$$\frac{D^n.(aa.\alpha)}{1.2\dots n} = (rqp)_{\mathfrak{n}(n+1)} = {}^{rqp}_{n+1}C$$

$$= {}^{rq}_2B\alpha + {}^{rq}_3B\alpha + {}^{rq}_4B\alpha + \text{etc.} + {}^{rq}_nB\alpha$$

128. Für vier Reihen $srqp$ (115) ist

$$(Aaaa.\alpha) = (srqp)_{\mathfrak{n}1} = {}^{srqp}_4D = {}^{srq}_3C\alpha$$

$$D.(Aaaa.\alpha) = (srqp)_{\mathfrak{n}2} = {}^{srqp}_5D = {}^{srq}_3C\beta + {}^{srq}_4C\alpha$$

$$\frac{D^2.(Aaaa.\alpha)}{1.2} = (srqp)_{\mathfrak{n}3} = {}^{srqp}_6D = {}^{srq}_3C\gamma + {}^{srq}_4C\beta + {}^{srq}_5C\alpha$$

= = = = = =

$$\frac{D^n.(Aaaa.\alpha)}{1.2\dots n} = (srqp)_{\mathfrak{n}(n+1)} = {}^{srqp}_{n+1}D$$

$$= {}^{srq}_3C\alpha + {}^{srq}_4C\alpha + {}^{srq}_5C\alpha + \text{etc.} + {}^{srq}_nC\alpha$$

und so auch bey mehr als vier Reihen, für die das Fortgangsgesetz ohne Schwierigkeit in die Augen fällt. Es läßt sich alles schon aus dem ganz einfachen Gesetze in (126) ableiten, wenn man die $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ beibehält, wie sie dort stehen, und statt der $a, b, c, d \dots$

die Classen, B bey drey Reihen rqp , und C bey vier Reihen $srqp$, und so weiter bey mehreren Reihen, jedesmal von der niedrigsten Summe an, substituirt.

Auch ist, alles durch zweyte Classen ausgedrückt,

$$\frac{D^n.(Aa.a\alpha)}{1.2\dots n} = (srqp) \cdot (n+1)$$

$${}^{sr}B.^n + {}^{qp}B + {}^{sr}B.^n + {}^{qp}B + {}^{sr}B.^n + {}^{qp}B + \text{etc.} + {}^{sr}B.^n + {}^{qp}B$$

129. In (120) folgen

aus der Union $\gamma = {}^3A$, im ersten Winkel;
die Binionen ${}^4B$, im zweyten Winkel; daraus
die Ternionen ${}^5C$, im dritten Winkel; daraus
die Quaternionen ${}^6D$, im vierten Winkel; u. s. w.

wo der Summenexponent für jede zunächst folgende
Variationsklasse um 1 höher ist; gerade so, wie bey den
Combinationsclassen (Erst. Anh. 11, und die dortigen
Bemerkungen in 12)

$$\left| \begin{array}{c} {}^{qp} \\ {}^5B \end{array} \right| = {}^{qp} {}^5B$$

$$\left| \begin{array}{c} {}^r \\ a \\ {}^5B \\ b \\ {}^4B \\ c \\ {}^3B \\ d \\ {}^2B \end{array} \right| = {}^{rqp} {}^6C$$

$$\left| \begin{array}{c} {}^s \\ A \\ {}^6C \\ B \\ {}^5C \\ C \\ {}^4C \\ D \\ {}^3C \end{array} \right| = {}^{srqp} {}^7D$$

u. s. w. f.

130. In der Anordnung (120, und im zweyt. Anhang Taf. I, C, F) werden Summen einzelner Complexionen, wie sie in den dortigen Winkeln stehen, involvirt. An ihrer Stelle involvire man nun die zugehörigen Variationsclassen selbst mit ihren Zeichen, von der zweyten B an (eigentlich kann man die Involution anfangen, von welcher Classe man will) so kommt die involutorische Darstellung, wie sie hier zur Seite steht; in welcher ich die Winkel mit ihren Füllungen, zu mehrerer Deutlichkeit, etwas von einander abgerückt habe. Auch stehen die Reihenbuch-

staben hier nur über den ersten Gliedern, zugleich als Nachweisung für die übrigen. Hier ist also

$${}^{rqp}_6C = a^{qp}_5B + b^{qp}_4B + c^{qp}_3B + d^{qp}_2B$$

$${}^{srqp}_7D = \mathfrak{A}^{rqp}_6C + \mathfrak{B}^{rqp}_5C + \mathfrak{C}^{rqp}_4C + \mathfrak{D}^{rqp}_3C$$

der Form nach mit (127, 128) vollkommen übereinstimmend. Hier sind nämlich die Anfangsbuchstaben a, b, c, d ; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$; dort die Endbuchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit den Classen verbunden, angegeben, welches zu denselben Complexionen führt, weil $r.qp = rq.p = rqp$, und eben so $s.rqp = srq.p = srqp$.

131. Diese Involution der Classen führt also gerade zu auf zerlegende Formeln, wie in (120, I; 126–128) vorkommen. Eben so kann man auch Producte von Classen involviren, und dadurch Ausdrücke von Producten der Classen aller Art erhalten, wie in (123. II; 128) nur von der zweyten Classe vorkommen. Ich will mich aber dabey nicht aufhalten, und nur noch des *Methodi Productorum*, wie ich ihn nenne, eines Verfahrens, dem ähnlich, was der *Methodus Potentiarum* zeigt, Erwähnung thun, wovon die Formel im *Nov. System. Perm. p. LXXVI, E, 9* steht,

ACHTER ABSCHNITT.

Die combinatorische Evolution der Polynomialgrößen ist analytisch, auch sind die combinatorischen Involutionen und Deductionen wahre Derivationen, und zugleich die leichtesten ihrer Art.

132. Dafs die Polynomialgrößen mit unübertrefflicher Leichtigkeit combinatorisch sich darstellen lassen, ist nach dem, was im Vorhergehenden darüber beyge-

bracht worden ist, nicht dem geringsten Zweifel unterworfen. Sind aber diese Darstellungen auch analytisch? Diese Frage hat bereits der Conferenzzrath TETENS verneint (Sml. I. S. 2, 3), in so fern er die combinatorischen Operationen in der Analysis für fremd ansieht, giebt aber doch zu, man könne sie eben sowohl unter die analytischen Methoden aufnehmen, als das Differentiiren und Integriren. Was Prof. PFAFF auf jene Äusserung „die combinatorischen Operationen seyen der Analysis fremd“ erwiedert hat, darüber kann man im Archiv der Mathematik (Heft VII, S. 348) nachsehen. Auch Prof. ARBOGAST erklärt das bey Entwicklung und Darstellung der Polynomialgrößen angebrachte combinatorische Verfahren für *moins analytique*. Die Gründe, die ihn zu diesem Ausspruch bewogen haben, stehen nicht an der Stelle, wo er ihn ausdrücklich äussert [no. 52] sondern in der Vorrede seines Werks [Seite v], wo die derivativen Verfahren mit den combinatorischen verglichen, und die ersten den letztern vorgezogen werden. Sie beruhen auf folgendem:

1) Der Derivationscalculus giebt die Glieder der Polynomialgrößen durch eine zusammenhängende Rechnung, Buchstabenproducte und ihre numerischen Coefficienten, beyde zusammen auf einmal. In der combinatorischen Analysis hingegen werden diese Größen stückweise gefunden, zuerst die Litteralproducte, dann die zugehörigen numerischen Coefficienten (die Versetzungszahlen).

2) Der Derivationscalculus bedarf keiner zum voraus berechneten Combinationstabeln, noch anderer, gewissermaßen mechanischen, Hilfsmittel durch Vertheilung in Fächer, um dadurch die Gruppen der Polynomialgrößen zu formiren.

3) Die Derivationsrechnung leitet durch einen zusammenhängenden Calcul eine Polynomialgröße aus der andern her, und stellt sie ganz reducirt auf; alles

mit solcher Leichtigkeit, daß dabey nichts weiter als die Mühe des Schreibens in Anschlag kommt.

133. Darauf ist zu erwiedern:

1) Was den ersten Punct anbetrifft, so muß ich mich vorläufig auf die ausführliche Erklärung berufen, die ich (Sml. II. S. 62, 63 Note k, und in den darinn citirten Stellen) gegeben habe. Ich halte, mit mehreren Analysten, noch immer dafür, es sey einfacher und leichter, zuerst die Literalproducte darzustellen, und ihnen nachher die numerischen Coefficienten beyzufügen. Die Aufstellung beyder zusammen, durch eine und dieselbe Regel, theilt schon die Aufmerksamkeit und macht das Gesetz dafür etwas verwickelter, weil Literalproducte und ihre Versetzungszahlen ganz verschiedene Elemente sind; die einen auf die Gestalt der Complexionen, die andern auf ihre Menge, Beziehung haben. Es scheint demnach besser zu seyn, wenigstens ist es bequemer, diese Elemente von einander abgesondert, als mit einander vereinigt, in Betrachtung zu ziehen. Daß aber die rein-combinatorischen Operationen und Involutionen, durch welche die Polynomialgrößen dargestellt werden, wirklich analytisch sind, kann nicht in Zweifel gezogen werden, weil sonst mehrere Arbogastische *Règles* [z. B. no. 30, 36, 43, 47] die mit meinen combinatorischen Vorschriften genau übereinstimmen, auch nicht analytisch seyn würden, da sie doch Resultate zusammenhängender, ganz unbestritten analytischer Arbeiten sind.

2) Was die zweyte Aeusserung anbetrifft, so beruht selbige auf der Voraussetzung, als ob die combinatorische Analysis solcher zum voraus berechneter Combinationstafeln und Vertheilung der Größen in Fächer unumgänglich nöthig habe, und sie nicht ent-

behren könne. Keinesweges. Sie entwickelt die Formeln und die darinn enthaltenen combinatorischen Ausdrücke sogleich an Ort und Stelle, wo sie gebraucht werden, ohne alle Beyhülfe von Tafeln und andern mechanischen Hilfsmitteln. Wenn Combinationstafeln aufgestellt werden, so geschieht es blos der Bequemlichkeit wegen, auch noch die an sich leichten Regeln der Darstellung entbehrlich zu machen, die man sonst befolgen müßte. Ueberdies dienen sie zur Vergleichung und Verificirung des Gefundenen, weil es doch möglich ist, bey der Anwendung noch so leichter Verfahren sich zu versehen. Die hin und wieder aufgestellte Vertheilung der Größen in Fächer, ist eben so an sich entbehrlich, als es die vorher-berechneten Combinationstafeln sind; die Resultate, die man braucht, hängen keinesweges davon ab. Aber eine solche Vertheilung ist ein vortreffliches Mittel, den Zusammenhang des Ganzen durch eine anschauliche Darstellung der einzelnen Theile und ihrer Verbindung unter einander mit einem Blicke zu übersehen. Ein paar Beyspiele werden hier nicht überflüssig seyn.

In der ersten Sammlung combinatorisch - analytischer Abhandlungen wird (S. 202) eine Tafel der Combinationen zu unbestimmten Summen n , in lexikographischer Ordnung mitgetheilt, welche das Ableitungsgesetz folgender Glieder aus vorhergehenden deutlich vor Augen legt, und als eine im voraus berechnete Tafel, die zusammen gehörigen Complexionen, für jeden bestimmten Werth von n , sogleich darstellt. Gleichwohl ist eine solche Tafel gar keine nothwendige Bedingung der combinatorischen Entwicklung oder Zusammensetzung der Größen, auf die sie sich bezieht; wie das Exempel (Ebend. S. 281) zeigt, für welches die dort verlangten Glieder, von

jener Tafel unabhängig, mit größter Leichtigkeit sich finden lassen.

Gleiche Bewandnis hat es mit der (Ebend. S. 204) in Fächer eingetheilten Tafel der Combinationen zu unbestimmten Summen n , nach gut geordneten Complexionen und Classen; dahin auch die beyden Tafeln (S. 208, α , β), gehören. Welche anschauliche Darstellung gewährt hier nicht diese Vertheilung der Gröſſen in Fächer! Man faßt das Ganze mit seinen Theilen mit einem Ueberblick. Bey solchen Vorzügen dürfte es wohl wenig auf sich haben, wenn eine solche Tafel eine nothwendige unentbehrliche Norm für die darinn begriffenen Fälle enthielte, so, daß sich solche ohne diese Tafel nicht lösen ließen. Aber nein. Es wird (Ebend. S. 210, 1) ausdrücklich erinnert „Obschon hier folgende Complexionen und „Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so „kann man gleichwohl einzelne Vertical- Horizontal- „und Diagonal-Reihen und Fächer, ganz independent „von einander, auſſer der Ordnung, leicht schaffen. Das „giebt insonderheit die Tafel (S. 298, β) klar und „deutlich zu erkennen, weil man die Complexionen „jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen „kann.“

Dies ist der Gesichtspunct, aus welchem man die Combinationstafeln und die Vertheilung der Gröſſen in Fächer zu betrachten hat. Beyde sind nützliche aber entbehrliche Hülfsmittel. Die Darstellung combinatorischer Gröſſen hängt von leichten Regeln ab, durch deren Anwendung und Befolgung jene Gröſſen erst in die Tafeln gekommen sind.

Daß übrigens in der combinatorischen Analysis von der figürlichen Anordnung der Gröſſen

und ihrer Lage gegen einander häufig Gebrauch gemacht wird, um theils besondere theils allgemeine Sätze und Regeln daraus abzuleiten, ist aus unzähligen Beyspielen bekannt. Von einer *Arithmetica figurata*, einer *Analysi situs*, kommen überall nur Bruchstücke vor. Die Combinationslehre und ihre Anwendung auf die Analysis führt ganz ungezwungen darauf. Einige scharfsinnige hieher gehörige Bemerkungen Bürmann's in seinem *Appendice sur les Rapports de Situation* zu seinem obigen *Polynome Combinatoire* (S. 117). Was endlich

3) Den letzten Punct anbetrifft, so bleibt hier die combinatorische Analysis keinesweges hinter dem Derivationscalcul zurück. Auch sie leitet durch ein zusammenhängendes Verfahren die Polynomialgrößen, eine aus der andern her, und stellt sie ganz reducirt auf; bekanntermassen mit der Leichtigkeit, dass man dazu nicht mehr Zeit braucht, als man zum Schreiben nöthig hat.

Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet schon aus einer flüchtigen Uebersicht des ersten Anhangs zu dieser Abhandlung, in welchem Classen aus Classen, zu einerley und verschiedenen, steigenden und fallenden, Summenexponenten abgeleitet werden, sämmtlich in arithmographischer Folge. Beyspiele der eben so einfachen lexicographischen Anordnung kommen auch im zweyten Anhang (Taf. IV) vor. Die so große Leichtigkeit der Verfahren hängt lediglich von den rein - combinatorischen Operationen und Involutionen ab, die hier gebraucht werden, und auf bloßem Ansetzen oder Zufügen, Wegnehmen oder Absondern, Aus - oder Umtauschen (eine Substitution ohne alle Reduction) der vorgegebenen Elemente oder Größen beruhen.

134. Aus dem ersten Anhang und der Tafel IV im zweyten, ergibt sich ferner ohne Schwierigkeit, daß die combinatorischen Darstellungen der Classen aus Classen wahre Derivationen sind, die sich auf einen gewissen Anfang (*Origine*) beziehen. So folgen z. B. (Erst. Anh, 7) aus dem Anfange $\eta = {}^6A$, die übrigen Classen zu derselben Summe ${}^6B$, ${}^6C$, ${}^6D$, ${}^6E$, ${}^6F$, eine nach der andern, durch ein zusammenhängendes Verfahren, und (Ebend. 10, 11) aus dem Anfange $\pi = {}^9A$ die folgenden Classen mit steigenden Summen ${}^{10}B$, ${}^{11}C$; imgleichen aus dem Anfange $\theta = {}^7A$, die Classen ${}^8B$, ${}^9C$, ${}^{10}D$. . . Man vergleiche (zweyt. Anh. Taf. II. no. I und II) die dortigen Beispiele, sämmtlich in arithmographischer Folge. Ebendasselbst (no. IV) werden aus der Ordnung β^{n-1} alle übrigen β^{n-2} , β^{n-3} , β^{n-4} , u. s. w. nach einem gemeinschaftlichen Gesetze lexikographisch gefolgert. Die dortige No. V ist ein besonderer Fall, für $n=7$.

135. Ich habe bereits oben (6) erinnert, daß, wenn man meine Derivationen von den Arbogastischen durch einen besondern Namen unterscheiden will, man die meinigen combinatorische, die Arbogastischen analytische nennen könnte. Daß gleichwohl die combinatorischen Derivationen auch analytisch sind, ist (133, 1) schon bemerkt worden. Sie haben aber auch noch andere Ansprüche auf diese Benennung, in so fern sie involutorisch sind, und mit den Classen zu irgend einer Summe (z. B. zur Summe 10) auch zugleich die Classen aller nächst niedrigern Summen 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 deutlich mit vorgelegt werden, und letztere aus den erstern sich sogleich evolviren und deriviren lassen. Eben so verhält es sich mit den successiven Werthen der Größen (z. B. bey continuirlichen Brüchen) wo die frühern in die

spättern sich involviren, und wiederum aus den letztern die erstern sich evolviren lassen, mit einer solchen Klarheit und Leichtigkeit, die nur auf involutorischen Wegen möglich ist. Eine solche Übersicht der Gröſsen aus ihren Bestandtheilen verdient ohne Zweifel analytisch genannt zu werden. Wenn endlich, wie Prof. KLÜGEL nur noch neuerlich bemerkt hat (Smml. I. S. 49) die Analysis überhaupt die Formen der Gröſsen, nach ihrer Entwicklung und Umwandlung zum eigentlichen Gegenstande hat: so gehören gewifs die combinatorischen Operationen und Involutionen vornehmlich dahin, die sich ausschliesslich mit Auf- findung der Gestalten und Formen, so wie mit ihrer Umwandlung (der arithmographischen in die lexicographische, der Moivr'schen Form in die Boscovich'sche) beschäftigt; u. s. w.

ERSTER ANHANG

COMBINATORISCHE ENTWICKELUNG UND DARSTELLUNG DER COMPLEXIONEN FÜR EINZELNE COMBINATIONSCLASSEN UND MEHRERE ZUSAMMEN.

Ich habe zwar in der vorhergehenden Abhandlung als bekannt vorausgesetzt, wie die Gröſſen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, {}^nD, \dots$ oder ${}^nA, {}^{n+1}B, {}^{n+2}C, {}^{n+3}D, \dots$ und andere dergleichen für gegebene Summenexponenten und Zeiger, combinatorisch sich entwickeln und darstellen lassen; eine Voraussetzung, zu welcher ich um so mehr berechtigt war, weil darüber bereits in meinen und Anderer ^{a)} Schriften häufige und ausführliche Anweisungen ertheilt worden sind. Indessen dürfte es doch, gewisser Leser wegen, die hier vielleicht eine nähere Belehrung wünschen und erwarten, vornehmlich aber zu unmittelbarer Vergleichung des oben berührten Arbogastischen derivativen Verfahrens [no. 23 — 49] mit meinem combinatorischen, insbesondere aber der derivativen, hier (70, 71, 73, 76, 78) aufgestellten Regeln mit den meinigen, nützlich seyn, im Buche selbst etwas davon

a) TÖPFERS, ROTHENS, PRASSENS, PFAFFS, KLÜGELS, und neuerlich auch STAHLs (Grundriß der Combinationslehre) und WEINGÄRTNERS (Lehrbuch der combinatorischen Analysis); worinn von combinatorischen Operationen und Involutionen ausführlich gehandelt worden ist.

nachgewiesen zu finden. Das kann auch um so eher geschehen, weil aus der großen Menge combinatorischer Entwicklungen und Darstellungen, hier nur ein sehr kleiner, aber wichtiger, Theil, zu Erfüllung jener Absicht schon hinreicht. Um den Faden der vorstehenden Abhandlung nicht zu unterbrechen, habe ich das dahin gehörige in diesen Anhang kurz zusammen gefasst. Zu besserer Übersicht mag Folgendes dienen.

I. Es seyen P, Q zwey nächste Combinationsclassen mit Wiederholungen; $n, n+1$ zwey nächste Summenexponenten dieser Classen, so geben für

$$\begin{array}{l} {}^nP, \quad {}^{n+1}P \\ {}^nQ, \quad {}^{n+1}Q \end{array}$$

die horizontalen, verticalen und diagonalen Verbindungen zu zwey und zwey (vor- und rückwärts) dieser vier Classen, folgende Verschiedenheiten:

A. Einerley Classen zu verschiedenen Summen.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe,

I. Dieselbe Classe zur nächsthöheren Summe

II. Dieselbe Classe zur nächstniedrigeren Summe

herzuleiten.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{I} & & \text{II} \\ & & \hline {}^nP & & {}^{n+1}P & & {}^nP \end{array}$$

B. Verschiedene Classen zu einerley Summe.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe;

III. Die nächsthöhere Classe zu derselben Summe

IV. Die nächstniedrigere Classe zu derselben Summe

herzuleiten.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{III} & & \text{IV} \\ & & \hline {}^nP & & {}^nQ & & {}^nP \end{array}$$

C. Verschiedene Classen zu verschiedenen Summen.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe

V. Die nächsthöhere Classe zur nächsthöheren Summe

VI. Die nächstniedrigere Classe zur nächstniedrigern Summe

$$\begin{array}{ccc} & \text{V} & \text{VI} \\ \hline {}^nP & {}^{n+1}Q & {}^nP \end{array}$$

VII. Die nächsthöhere Classe zur nächstniedrigern Summe

VIII. Die nächstniedrigere Classe zur nächsthöheren Summe herzuleiten.

$$\begin{array}{ccc} & \text{VII} & \text{VIII} \\ \hline {}^{n+1}P & {}^nQ & {}^{n+1}P \end{array}$$

Von den noch übrigen Combinationen ist:

${}^nQ$, ${}^{n+1}Q$, ${}^nQ$ mit I, II; und ${}^{n+1}P$, ${}^{n+1}Q$, ${}^{n+1}P$ mit III, IV gleichgültig. Diese gehören also nicht weiter hieher.

Diese Aufgaben, für bestimmte Classen und Summen, werden in der Folge, nach der Ordnung der hier beygefügtten Zahlen I, II...VIII, aufgeführt werden. Zuförderst noch Folgendes, als nöthige Vorerinnerung:

2. Zu prompter Anordnung und Darstellung der Complexionen jeder verlangten Combinationssclasse mit ihren Ordnungen, ist es wichtig, das Wenige, was hier folgt, immer in Gedanken und vor Augen zu haben.

a) Die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ als Coefficienten der Reihe, werden auf Zahlenwerthe bezogen, wie sie der Zeiger $\begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta \dots \\ 1, 2, 3, 4 \dots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \xi, \gamma, \delta, \epsilon \dots \\ 1, 2, 3, 4 \dots \end{pmatrix}$ u. s. w. nachweist.

b) Die Glieder oder Complexionen der Classen ${}^nA, {}^nB, {}^nC, \dots$ gehören sämtlich zu einer und derselben Summe, n ; das heißt, in jeder einzelnen Complexion dieser Classen müssen die Zahlenwerthe der Elemente, nach dem Zeiger diese Summe ausmachen.

c) Die Classen z. B. ${}^9D$, ${}^{10}D$ bestehen aus so vielen Complexionen, so viel sich aus dem Zeiger Quaternionen (von Zahlen oder Buchstaben) mit Wiederholungen, gut geordnet (in alphabetischer oder numerischer Folge) zusammen setzen lassen, und die Summe 9 oder 10 ausmachen. Eben so für andere Classen und Summen.

d) Diese Complexionen müssen, nicht blos in Absicht auf die Elemente jeder einzelnen (c) sondern auch unter einander gut geordnet seyn, d. i. als Zahlen gelesen, wie wachsende Zahlen fortgehen, und auf einander folgen. Das nennt man gut geordnete Complexionen und Classen.

e) Die Complexionen der Classen lassen sich endlich combinatorisch

1) von andern vorhergehenden oder folgenden (frühern oder spätern) Classen und Summen abhängig herleiten; oder

2) von dergleichen Classen oder Summen unabhängig construiren; indem man dabey von einem gewissen Anfange (*Origine*) ausgeht, von welchem alle übrigen Complexionen, die man für eine oder mehrere Classen sucht, nach und nach abfliessen.

Die combinatorischen, auf diese Sätze gegründeten, Vorschriften für die Auflösung der folgenden Aufgaben, sind äusserst leicht, und eben so leicht ist die Einsicht in ihre Gründe.

Einerley Classen zu verschiedenen Summen (I, A)

3. Aufgabe. ${}^nD$, ${}^{n+1}D$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array} \right)$$

für $n=9$, ist

I		II	
${}^9D$	${}^{10}D$	${}^9D$	
$=$	$=$	$=$	
$\beta\beta\beta\eta$	$\beta\beta\beta\theta$	$\beta\beta\beta\eta$	
$\beta\beta\gamma\zeta$	$\beta\beta\gamma\eta$	$\beta\beta\gamma\zeta$	
$\beta\beta\delta\varepsilon$	$\beta\beta\delta\zeta$	$\beta\beta\delta\varepsilon$	
	$\beta\beta\varepsilon\zeta$	----	
$\beta\gamma\gamma\varepsilon$	$\beta\gamma\gamma\zeta$	$\beta\gamma\gamma\varepsilon$	
$\beta\gamma\delta\delta$	$\beta\gamma\delta\varepsilon$	$\beta\gamma\delta\delta$	
	$\beta\delta\delta\delta$	----	
$\gamma\gamma\gamma\delta$	$\gamma\gamma\gamma\varepsilon$	$\gamma\gamma\gamma\delta$	
	$\gamma\gamma\delta\delta$	----	

I Aus ${}^9D$ zu deriviren ${}^{10}D$

1) Den letzten Buchstaben jeder Complexion (in ${}^9D$) vertausche man mit dem nächstfolgenden des Alphabets oder Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\eta$ folgt $\beta\beta\beta\zeta$; aus $\beta\beta\gamma\zeta$ folgt $\beta\beta\gamma\eta$ u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen dem letzten Buchstaben, oder einer Dignität desselben, der nächstvorhergehende Buchstabe des Alphabets oder eine Potenz von ihm vorangeht, vertausche man diesen Buchstaben oder einen Factor seiner Potenz, mit dem nächstfolgenden des Alphabets, und schreibe die so gefolgerte Complexion sogleich nach der, die (1) gegeben hat.

(Aus $\beta\beta\delta\varepsilon$ folgt $\beta\beta\delta\zeta$ (nach 1) und $\beta\beta\varepsilon\zeta$ (nach 2); aus $\beta\gamma\delta\delta$ folgt $\beta\gamma\delta\varepsilon$ (nach 1) und $\beta\delta\delta\delta$ (nach 2); aus $\gamma\gamma\gamma\delta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\varepsilon$ (nach 1) und $\gamma\gamma\delta\delta$ (nach 2).

Hier waren nemlich alle gut geordnete Complexionen (Quaternionen) zur verlangten Summe (hier 10), aus den gegebenen zur nächstniedrigern Summe, abzuleiten und in eine gut geordnete Classe zusammen zu stellen ($2, b, c, d$). So läßt sich die Richtigkeit der Auflösung (1, 2) geschwind übersehen und rechtfertigen.

Von einer Modification der Regel, und dadurch etwas veränderten Auflösung von I, sehe man (in 8).

Diese combinatorische Auflösung ist mit der derivativen (71) bis auf die numerischen Coefficienten, vollkommen übereinstimmend. Man vergleiche (72).

II, Aus ^{10}D zu deriviren ^9D

1) In jeder Complexion (in ^{10}D) worinn die beyden letzten Buchstaben verschieden sind, vertausche man den letzten Buchstaben mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers oder Alphabets.

(Aus $\beta\beta\beta\vartheta$ folgt $\beta\beta\beta\eta$; aus $\beta\beta\gamma\eta$ folgt $\beta\beta\gamma\zeta$; u. s. w.)

2) Die übrigen Complexionen, die zwey oder mehrere gleiche Endbuchstaben enthalten, übergehe man.

(Dergleichen sind hier $\beta\beta\epsilon\epsilon$, $\beta\delta\delta\delta$, $\gamma\gamma\delta\delta$; diese würden nämlich (nach 1) lauter schlechtgeordnete Complexionen geben).

Auch diese Regel liefse sich, wie die für I, nach (8) modificiren, und die Auflösung für II etwas dadurch abändern.

ARBOGAST's damit übereinstimmende derivative Regel, in (73)

4. Über das sehr nützliche Verfahren, allgemeine Vorschriften an besondern Beyspielen, wie hier (3, I, II), nachzuweisen, und was man dabey zu beobachten habe; MOIVRE's Bemerkung (*Infin. Dign.* p. 78. Note).

JAC. BERNOULLI (*Ars coni. p. 21*) sagt von einer combinatorischen Anordnung, was von allen gilt: *Haec omnia melius exemplis, quam regulis addisci possunt*; nach MOIVRE hat man noch mehr; Regel und Beyspiel beysammen vereinigt. Begreiflich muß das Exempel, als besonderer Fall, so gewählt seyn, daß sich die einzelnen Theile der Regel deutlich darauf anpassen lassen. Ich werde daher auch in der Folge immer solche Beyspiele aufstellen.

Man übersieht leicht, daß die Anordnung der Complexionen und ihre Folge jede andere seyn könnte, als hier (in 2) gefordert wird, wenn man sie nur alle hat. Aber die Bedingung von gut geordneten Complexionen und Classen (a, c, d) ist ein sehr sicheres und äusserst bequemes Mittel, keine Complexion zu verfehlen, keine doppelt zu erhalten. Ein anderes, nicht so bequemes Verfahren, die ${}^mM, {}^{m+1}M, {}^{m+2}M \dots$ durch einander abzuleiten, und auf ${}^5E, {}^6E, \dots {}^{10}E$ angewendet (PFAFF *Disquis. anal. p. 292*). Dort sind zwar die Complexionen, nicht aber die Classen, gut geordnet.

Wie man die Complexionen aller Classen zur Summe n , aus denen zur Summe $n-1$ deriviren könne; von WEINGAERTNER bequem angeordnet (*Lehrb. der combin. Anal. I. 29. S. 130, 131*). Das Verfahren läßt sich leicht umkehren, um von n auf $n-1$ zu deriviren.

Verschiedene Classen zu einerley Summe (1, B)

5. Aufgabe. ${}^nC$, ${}^nD$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \beta & \gamma & \delta & \dots & \iota & \kappa & \lambda & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 8 & 9 & 10 & \dots \end{array} \right)$$

Für $n=12$, ist

III			IV		
${}^{12}C$			${}^{12}D$		${}^{12}C$
$\beta\beta\lambda$			$\beta\beta\beta\kappa$		$\beta\beta\lambda$
$\beta\gamma\kappa$			$\beta\beta\gamma\iota$		$\beta\gamma\kappa$
$\beta\delta\iota$			$\beta\beta\delta\theta$		$\beta\delta\iota$
$\beta\varepsilon\theta$			$\beta\beta\varepsilon\eta$		$\beta\varepsilon\theta$
$\beta\zeta\eta$			$\beta\beta\zeta\zeta$		$\beta\zeta\eta$
$\gamma\gamma\iota$			$\beta\gamma\gamma\theta$		$\gamma\gamma\iota$
$\gamma\delta\theta$			$\beta\gamma\delta\eta$		$\gamma\delta\theta$
$\gamma\varepsilon\eta$			$\beta\gamma\varepsilon\zeta$	- -	$\gamma\varepsilon\eta$
$\gamma\zeta\zeta$	- - -		- - - -		$\gamma\zeta\zeta$
$\delta\delta\eta$			$\beta\delta\delta\zeta$		$\delta\delta\eta$
$\delta\varepsilon\zeta$			$\beta\delta\varepsilon\varepsilon$	- -	$\delta\varepsilon\zeta$
$\varepsilon\varepsilon\varepsilon$	- - -		- - - -		$\varepsilon\varepsilon\varepsilon$
			$\gamma\gamma\gamma\eta$		
			$\gamma\gamma\delta\zeta$		
			$\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$		
			$\gamma\delta\delta\varepsilon$		
			$\delta\delta\delta\delta$		

III. Aus ${}^{12}C$ zu deriviren ${}^{12}D$

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (${}^{12}C$), mit Übergangung derer, die am Ende zwey oder mehr gleiche Elemente haben, setze man β vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers. Dies giebt die

mit β anfangenden Complexionen (die Ordnung β) der zu derivirenden Classe (^{12}D).

(Die Puncte neben $\gamma\gamma\zeta$ und $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ in ^{12}C weisen nach, daß diese Glieder keine Complexionen in ^{12}D geben.)

2) In den so gefundenen Complexionen der Ordnung β (mit Übergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beydes zusammen, haben) vertausche man den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden, des Zeigers (nicht der Complexion). So erhält man die mit γ anfangenden Complexionen (die Ordnung γ) derselben Classe (^{12}D)

(Aus $\beta\gamma\gamma\vartheta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\eta$; aus $\beta\gamma\delta\eta$ folgt $\gamma\gamma\delta\zeta$;

aus $\beta\gamma\varepsilon\zeta$ folgt $\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$; aus $\beta\delta\delta\zeta$ folgt $\gamma\delta\delta\varepsilon$;

Nur daraus lassen sich gut geordnete Complexionen folgern.)

3) Eben so derivirt man die Ordnung δ aus der Ordnung γ , wenn man die Vorschrift (2) auf die Ordnung γ , wie vorher auf β , anwendet, und eben so die zugehörigen Anfangs- und Endbuchstaben der umzuwandelnden Complexionen vertauscht. Und so für die übrigen Ordnungen, so viel deren die zu derivirende Classe enthält, bis man (2) nicht weiter anwenden kann.

(Aus $\gamma\delta\delta\varepsilon$ folgt $\delta\delta\delta\delta$, die einzige Complexion der Ordnung δ und zugleich die letzte der Classe ^{12}D)

Anmerkung. Wenn man den Complexionen in ^{12}C , β vorsetzt (III, 1), und nachher (III, 2) β mit γ , und (III, 3) γ mit δ , u. s. w. vertauscht, ohne weiter etwas zu ändern, so erhält man dadurch lauter zu ^{13}D (nicht zu ^{12}D) gehörige Complexionen; wo also jene erst auf diese, durch (3, II) oder [no. 36], zu reduciren wären. Durch das, was ich hier (in 1, 2) von Vertauschung des letzten Buchstabens jener Complexionen mit dem nächst vorhergehenden, gesagt habe, wird jene Nachweisung entbehrlich gemacht. Es ist bequem

in der Auflösung alles, was zu vollkommner Darstellung der Complexionen gehört, beysammen zu haben, wenn sich das so in der Kürze, wie hier und zunächst in (IV), abthun läßt; es ist aber auch nützlich, die Beziehung der Aufgaben und ihre Dependenz von einander zu kennen. Und so begreift man ohne Schwierigkeit: 1) woher in dem Arbogastischen Vortrage der Regel (78, II, III, IV) die Berufung auf [no. 36] herührt, die bey mir nicht vorkommt 2) wie und warum die dortigen (I, II) hier (in I) sich haben zusammen ziehen lassen 3) daß jene derivative Regel (78) mit meiner (Sml. I. S. 183. 184 zuerst vortragenen) hiesigen combinatorischen Vorschrift, ganz vollkommen übereinstimme und identisch sey; das abgerechnet, versteht sich, was in jener Regel die Bestimmung der numerischen Coefficienten anbetrißt, die ich mit gutem Vorbedacht besonders betrachte.

IV. Aus ^{12}D zu deriviren ^{12}C

1) Von allen Complexionen der (ersten) Ordnung β der gegebenen Classe (^{12}D) schneide man das vorderste β durch einen Senkstrich, oder auf andere Art, ab, und vertausche den letzten Buchstaben der so gekürzten Complexionen mit dem nächstfolgenden des Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\kappa$ folgt $\beta\beta\lambda$; aus $\beta\beta\zeta\zeta$ folgt $\beta\zeta\eta$; u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen der letzte Buchstabe (einzeln oder wiederholt) den nächstvorhergehenden des Zeigers (einzeln oder wiederholt) zum Vorgänger hat, wird auch dieser vorletzte Buchstabe in den nächstfolgenden des Zeigers verwandelt, und die so veränderte Complexion gleich nach der gesetzt, die (1) gegeben hat.

(Aus $\beta\gamma\epsilon\zeta$ folgt $\gamma\epsilon\eta$ (aus 1) und $\gamma\zeta\zeta$ (aus 2)

aus $\beta\delta\epsilon\epsilon$ folgt $\delta\epsilon\zeta$ (aus 1) und $\epsilon\epsilon\epsilon$ (aus 2)

wie auch die Puncte in beyden Fällen nachweisen.)

Anmerkung. Das Abschneiden der β in (1) giebt lauter zu ${}^{11}C$ (nicht zu ${}^{12}D$) gehörige Complexionen. Daher eben die Vertauschung der letzten (1) zuweilen auch der vorletzten (2) Buchstaben der so gekürzten Complexionen mit dem nächstfolgenden, in der Regel selbst bemerkt; wogegen AREOGAST (76) den Satz [no. 30] hier (71) citirt. Und so ist wieder die derivative Regel (76) mit der hier gegebenen combinatorischen Vorschrift vollkommen übereinstimmend und identisch.

6. Da auf der Deduction der Ordnungen aus einander bey der rein-combinatorischen Darstellung so viel, ja fast alles, beruht, so will ich noch folgende

Ordnungen von ${}^{15}C$

$\beta\beta\xi$					
$\beta\gamma\nu$	$\gamma\gamma\mu$				
$\beta\delta\mu$	$\gamma\delta\lambda$	$\delta\delta\kappa$			
$\beta\varepsilon\lambda$	$\gamma\varepsilon\kappa$	$\delta\varepsilon\iota$	$\varepsilon\varepsilon\theta$		
$\beta\zeta\kappa$	$\gamma\zeta\iota$	$\delta\zeta\theta$	$\varepsilon\zeta\eta$	$\zeta\zeta\zeta$	
$\beta\eta\iota$	$\gamma\eta\theta$	$\delta\eta\eta$			
$\beta\theta\theta$					

wie sie aus einander sich deriviren lassen, neben einander stellen und als Beyspiel hier vorlegen. In (5, III, 1) würde die Ordnung β (für ${}^{12}D$) erst gesucht, und daraus die übrigen (Ebend. 2, 3) abgeleitet. Wäre, wie zuweilen geschieht und man auch hier (in ${}^{15}C$) annehmen kann, die Ordnung β , oder jede andere, gegeben, so könnte man die übrigen gleich nach (2, 3) bestimmen. Die Complexionen in den verticalen Colonnen liegen hier, zur unmittelbaren Vergleichung, so neben einander, wie eine aus der andern in horizontaler Richtung sich folgern läßt.

7. Von den Classen

${}^nA, {}^nB, {}^nC, {}^nD, {}^nE \dots {}^nN$
(für obigen Zeiger)

sind die beyden äußersten, für jeden Werth von n , gegeben. Für $n=6$ wäre ${}^6A = \eta$ und ${}^6F = \beta\beta\beta\beta\beta\beta = \beta^6$, und so könnte man η oder β^6 als Anfang der combinatorischen Deductionen (*Origine des Dérivations*) und als erste Classe annehmen, und daraus die zweyte, und daraus weiter die dritte, und so ferner die übrigen Classen mit ihren Ordnungen, zu derselben Summe, von allen Classen vorhergehender oder folgender Summen unabhängig, deriviren.

Folgende beyden Schemata bedürfen keiner weitem Erläuterung.

${}^6A$	η	${}^6F$	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$
	$\beta\zeta$	${}^6E$	$\beta\beta\beta\beta\gamma$
${}^6B$	$\gamma\epsilon$		
	$\delta\delta$	${}^6D$	$\beta\beta\beta\delta$
			$\beta\beta\gamma\gamma$
	$\beta\beta\epsilon$		
${}^6C$	$\beta\gamma\delta$	${}^6C$	$\beta\beta\epsilon$
	$\gamma\gamma\gamma$		$\beta\gamma\delta$
			$\gamma\gamma\gamma$
${}^6D$	$\beta\beta\beta\delta$		
	$\beta\beta\gamma\gamma$		$\beta\zeta$
		${}^6B$	$\gamma\epsilon$
${}^6E$	$\beta\beta\beta\beta\gamma$		$\delta\delta$
${}^6F$	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$	${}^6A$	η

Hier ist jede Derivation die umgekehrte der andern (directen). Für beyde sind die Anfangsglieder (*Origines*) η und $\beta\beta\beta\beta\beta\beta$ gegeben. Alles wird aus (5, III) im ersten, aus (5, IV) im zweyten Falle abgeleitet.

Anmerkung. Solche combinatorische Darstellungen der Complexionen nach einander, nennt man *independente*, weil die Entwicklung ihrer Classen keine Classen zu niedrigeren oder höhern Summen voraus-

setzt. Freylich ist an eine absolute Independenz hier nicht zu gedenken. Die Dependenz ruht hier auf den Ordnungen der Classen, und man sieht hier, und weifs schon sonst aus Erfahrung, dafs das, was man dafür zu merken und zu thun hat, an Leichtigkeit alles übertrifft, was man sich Leichtes denken mag; und so wird denn eine solche combinatorische Dependenz einer absoluten Independenz beynahe gleichgültig.

8. Da die Ableitung der Ordnungen aus Ordnungen ein so leichtes Geschäft ist, dafs man sich schwerlich dabey versehen kann: so wird es immer vortheilhaft seyn, die combinatorischen Aufgaben ganz oder zum Theil darauf zu reduciren. So z. B. wenn man ^{15}C aus ^{14}C oder ^{16}C deriviren sollte: so würde man immer leichter und geschwinder (wenigstens im ersten Falle) zum Zweck gelangen, wenn man die Regeln dafür (3. I und 3. II) nur auf die Darstellung der Ordnung β anwendete, und von da an die übrigen Ordnungen (von ^{15}C) von einander derivirte, wie in (6), als wenn man jene Regeln bis zu Ende verfolgen wollte. So läuft auch die Auflösung (5. III) auf ein blosses Bestimmen der Ordnung β (Das. 1) und Deriviren der übrigen Ordnungen durch einander (Das. 2, 3) hinaus. Auch die Regel (5. IV) läfst sich darauf bringen, wenn man sie blofs benutzt, die Ordnung β daraus herzustellen, und dann weiter Ordnungen aus Ordnungen ableitet. Das lehrt die Wichtigkeit der Vorschrift (5. III, 2, 3). Eine neue Bestätigung wird Folgendes zeigen.

Verschiedene Classen zu verschiedenen Summen (I, C)

9. Aufgabe. ${}^nC$, ${}^{n+1}D$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \dots & \theta & \iota & \kappa \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Für $n=11$, ist

${}^{11}C$	V	${}^{12}D$	VI	${}^{11}C$
$=$		$=$		$=$
$\beta\beta\kappa$		$\beta \mid \beta\beta\kappa$		$\beta\beta\kappa$
$\beta\gamma\iota$		$\beta \mid \beta\gamma\iota$		$\beta\gamma\iota$
$\beta\delta\theta$		$\beta \mid \beta\delta\theta$		$\beta\delta\theta$
$\beta\varepsilon\eta$		$\beta \mid \beta\varepsilon\eta$		$\beta\varepsilon\eta$
$\beta\zeta\zeta$		$\beta \mid \beta\zeta\zeta$		$\beta\zeta\zeta$
$\gamma\gamma\theta$		$\beta \mid \gamma\gamma\theta$		$\gamma\gamma\theta$
$\gamma\delta\eta$		$\beta \mid \gamma\delta\eta$		$\gamma\delta\eta$
$\gamma\varepsilon\zeta$		$\beta \mid \gamma\varepsilon\zeta$		$\gamma\varepsilon\zeta$
$\delta\delta\zeta$		$\beta \mid \delta\delta\zeta$		$\delta\delta\zeta$
$\delta\varepsilon\varepsilon$		$\beta \mid \delta\varepsilon\varepsilon$		$\delta\varepsilon\varepsilon$
		$\gamma \mid \gamma\gamma\eta$		
		$\gamma \mid \gamma\delta\zeta$		
		$\gamma \mid \gamma\varepsilon\varepsilon$		
		$\gamma \mid \delta\delta\varepsilon$		
		$\delta \mid \delta\delta\delta$		

V. Aus ${}^{11}C$ zu deriviren ${}^{12}D$

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (${}^{11}C$) setze man β vor, so hat man die Ordnung β der zu derivirenden Classe (${}^{12}D$)

2) Daraus leite man die Ordnung γ , und daraus die Ordnung δ , u. s. w. ab (5, III, 2, 3) so lange man diese Regel anwenden kann.

Anmerkung. Hier wird wieder eine Ordnung gesucht, und aus dieser die folgende, u. s. w. die übrige

gen, abgeleitet; wodurch das ganze Verfahren sehr einfach und leicht wird (8).

VI. Aus ^{12}D zu deriviren ^{11}C

1) Von der Complexion zur Ordnung β der gegebenen Classe (^{12}D) schneide man durch einen Verticalstrich die vordersten β ab.

2) An diesen Verticalstrich, wo er sich, neben dem letzten β endigt, ziehe man unter die übrigen, an diesem β liegenden, Buchstaben einen Horizontalstrich. Die Complexionen, die dieser Winkel faßt, geben zusammen die gesuchte Classe (^{11}C).

Anmerkung 1. Hatte man in (V) wenig, so hat man hier in (VI) fast gar nichts für die Auflösung zu thun. Das ganze Geschäft wird mit zwey Strichen abgethan, die einen Winkel einschliessen, und nichts kann leichter seyn, als diesen Winkel zu machen. Ich habe ihn mit Fleis auch bey der obigen dritten Colonne (für ^{11}C) beybehalten, zur deutlichen Nachweisung, daß ihre Complexionen dieselben sind, die innerhalb des Winkels der zweyten Colonne (für ^{12}D) stehen, und daß sie aus dieser nur ausgeschnitten und ausgehoben sind.

Anmerkung 2. Arithmetisch lies sich die Auflösung (VI) so ausdrücken: Alle Glieder der Gröfse (^{12}D) die β enthalten ($\beta^3\kappa + \beta^2\gamma_1 + \dots + \beta\delta^2\zeta + \beta\delta\epsilon^2$) dividire man durch β ; der Quotient ($\beta^2\kappa + \beta\gamma_1 + \dots + \delta^2\zeta + \delta\epsilon^2$) giebt die Glieder der gesuchten Gröfse (^{11}C). Jene anschauliche combinatorische Darstellung mit ihren Folgen, ist gleichwohl diesem, zwar kurzen, aber trocknen arithmetischen Ausdrücke (dergleichen bey ARBOGAST mehrere hin und wieder vorkommen) weit überlegen.

β	β	α	${}^9A$
β	γ	ι	
β	δ	θ	
β	ε	η	
β	ζ	ζ	
γ	γ	θ	${}^{10}B$
γ	δ	η	
γ	ε	ζ	
δ	δ	ζ	
δ	ε	ε	${}^{11}C$

10. Die aus (VI) erhaltene Classe ${}^{11}C$ läßt sich noch weiter eben so durch Winkel zerlegen, und die Classen ${}^{10}B$, ${}^9A$ daraus ausschneiden oder evolviren.

Umgekehrt, wenn man von der ersten Classe ${}^9A$ ausgeht, erhellet, wie sich diese in die zweyte Classe ${}^{10}B$, diese wieder in die dritte Classe ${}^{11}C$, und diese in die vierte Classe ${}^{12}D$ (9) involviren läßt, u. s. w. wenn man auf ${}^{13}E$, ${}^{14}F$, ... fortgehen wollte.

Das führt auf die schon sattsam bekannten combinatorischen Evolutionen und Involutionen, auf die involutorischen Darstellungen, die gleichsam die Seele der combinatorischen Analysis sind.

β	β	β	β	θ	${}^7A$	
β	β	β	γ	η		
β	β	β	δ	ζ		
β	β	β	ε	ε		
${}^{11}E$	β	β	γ	γ	ζ	${}^8B$
	β	β	γ	δ	ε	
	β	β	δ	δ	δ	
	β	γ	γ	γ	ε	${}^9C$
	β	γ	γ	δ	δ	
	γ	γ	γ	γ	δ	

11. Auf diesem Wege läßt sich jede verlangte Classe zu einer gegebenen Summe, z. B. ${}^{11}E$, involutorisch anordnen und darstellen. Denn weil aus ${}^{11}E$ sich ${}^{10}D$, ${}^9C$, ${}^8B$ und ${}^7A$ evolviren lassen, so darf man nur ${}^7A = \theta$ als Anfangsglied (*Origine des Derivations*) setzen, und daraus die Ordnungen von ${}^8B$, und daraus weiter die von ${}^9C$, und daraus die von ${}^{10}D$, und daraus endlich die von ${}^{11}E$ sämtliche Ordnungen von β an (der ersten) gerechnet, ableiten; indem man jeder Classe (sie sey nun entweder gegeben, wie ${}^7A$, oder durch Derivation gefunden, wie die übrigen) nach und nach β vorsetzt, ohne weiter etwas an den Endbuchstaben der Complexionen dieser Ordnung zu

ändern, und dann die übrigen Ordnungen (nach 5, III, 2, 3) jeder Classe weiter derivirt.

Dieses Verfahren habe ich bereits (Sml. I. S. 187, 188, §. 51) angegeben und an ${}^1D$ erläutert. Wie sich das dortige ${}^1D$, aus dem hiesigen ${}^1E$ ausschneiden liesse, zeigt der erste Winkel linker Hand; nur müßten auch statt

der hiesigen $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$

die dortigen a, b, c, d, e, f, g gesetzt werden.

Eine nützliche Folgerung aus obiger Darstellung der Classen, hier (13).

An sich ist es nicht nothwendig, die Winkel jedesmal zu ziehen, und man kann sie ohne Nachtheil vollkommen entbehren. Aber sie dienen, wie in die Augen fällt, zu deutlicher Nachweisung, wie sich eine Classe aus der andern deriviren läßt; und sind in dieser Rücksicht nützlich.

12. Das giebt ein neues Mittel einer sogenannten independenten (combinatorisch-dependenten, und daher äußerst leichten) Darstellung (7, Anm.) an die Hand, die vor jener noch Vorzüge hat. Dort mußte man, die Ordnung β der geforderten Classe zu machen, die vorhergehende Classe zu derselben Summe vor Augen haben, und das hat keine Schwierigkeit, wenn man die Classen ${}^nA, {}^nB, {}^nC \dots$ nach der Ordnung sucht, nicht aber wenn man eine außer der Ordnung braucht. Freylich muß man, z. B. hier für ${}^1E$, die Classen ${}^7A, {}^8B, {}^9C, {}^{10}D$ nach und nach produciren, welches, auf den ersten Anblick, weitläufig zu seyn scheint. Aber, wie durch ein Wunderwerk für den, der die erste Erfahrung dieser Art macht, wirkt hier die Evolution dahin, daß man zwar alle diese Classen, und wie sie einander bestimmen, auf einmal dargestellt vor Augen hat, dennoch aber für sie nichts weiter hat schreiben dürfen, als man für die Classe ${}^1E$ nothwendig hat schreiben müssen. Nichts darf hier verrückt, nichts geändert werden; alles ist vollkommen reducirt,

alles auf die einfachste Art, das heißt, involutorisch-combinatorisch angeordnet.

So etwas ist durch arithmetische Operationen und Hilfsmittel nicht zu erreichen, ist auch den gewöhnlichen bekannten analytischen Vorträgen ganz fremd. Dafs aber auch solche Darstellungen analytisch genannt werden können und mit welchem Rechte ich selbige, als analytische Hilfsmittel unter die übrigen, aufgestellt habe, lafst sich schon aus dem Wenigen hier angeführten übersehen. Ausführlicher davon (133, 135). Hier geht man durchgängig bis auf die Elemente, auf ihre Anordnung und Verbindung mit einander, zurück, und benützt die Vortheile, die sich durch die Stellung derselben ergeben. Auch hier, wie in den schönen Künsten, ist Darstellung die Hauptsache, der letzte und höchste Zweck. Wer ein blofs mechanisches Verfahren ^{b)} darinn zu finden glaubte, der würde die ganz einfachen Gründe übersehen, auf welche die aufgeführten Regeln und Vorschriften sich stützen, und dafs nur deswegen die involutorisch-combinatorischen Darstellungen so analytisch lehrreich sind, und die gesuchte Gröfse mit allen ihren Theilen, und deren Dependenz von einander, wie man will, gehörig verbunden und zugleich getrennt, mit einem Blick übersehen lassen.

13. ARBOGAST, den sein derivatives Substitutionsverfahren auf die combinatorischen Regeln (I—IV) lei-

b) Die gewöhnlichen involutorisch-combinatorischen Darstellungen sind eben so wenig, als mechanische Verfahren, als es die ihnen ganz gleichgültigen Derivationen sind. Dafs bey jenen oft Winkel gebraucht werden, qualificirt sie eben so wenig dazu; denn diese Winkel sind nicht nothwendig und man kann sie ganz entbehren (11). Solche figürliche Anordnungen hingegen (wie Sml. I. S. 204, 208), wo die Complexionen in besondere Fächer zusammengeordnet werden, kann man eher, wenn man will, mechanisch nennen. Davon ausführlicher (S. 289—291).

tete, in die es sich endlich auflöst, hat von den Regeln (V, VI) nichts bemerkt, die sich aus jenem Verfahren auch ableiten lassen. Eine Darstellung wie die z. B. ^{11}E (in 11) ist recht dazu geeignet, jede Classe als eine Summe niedrigerer Classen unmittelbar auszudrücken; und so wäre denn, im obigen Falle,

$$\begin{aligned}
 &^{11}E \\
 &\left(\begin{array}{cccccc} \beta & \gamma & . & . & . & \eta & \theta \\ 1 & 2 & . & . & . & 6 & 7 \end{array} \right) \\
 &= \beta^4 {}^7A + \beta^3 {}^8B + \beta^2 {}^9C + \beta^1 {}^{10}D + \beta^0 {}^{11}E \\
 &\left(\begin{array}{cccccc} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right) \\
 &= \beta^4 {}^6A + \beta^3 {}^6B + \beta^2 {}^6C + \beta^1 {}^6D + \beta^0 {}^6E \\
 &\left(\begin{array}{cccccc} \gamma & \delta & . & . & . & \eta & \theta \\ 1 & 2 & . & . & . & 5 & 6 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Man vergleiche (Sml. I. S. 189, 190, 191, 192, 237).

Hier sind: 1) Die Werthe der ${}^7A$, ${}^8B$, ${}^9C$, ${}^{10}D$, ^{11}E (in 13 und 11), wegen der verschiedenen Zeiger $\left(\begin{array}{c} \gamma, \delta \dots \\ 2, 3 \dots \end{array} \right)$ und $\left(\begin{array}{c} \beta, \gamma \dots \\ 1, 2 \dots \end{array} \right)$, nicht einerley, sondern verschieden. Man vergleiche (Sml. I. S. 189, 190). 2) Der letztere Ausdruck durch ${}^6A$, ${}^6B$, ${}^6C$, ${}^6D$, ${}^6E$ (dieselben Classen, wie vorher, aber zu der niedrigeren, durchaus gleichen, Summe 6, und dem einfacheren Zeiger von 1 an) ist der bequemere und gewöhnlich benutzte. 3) Dieser bequemere Ausdruck stimmt auch zu der combinatorischen allgemeinen Zerlegungsformel (61, vergl. 66), durch welche mit den Literalproducten für die Classen zugleich die numerischen Coefficienten gegeben werden.

4. Wenn eine Classe ^nM auf den Zeiger

$$\left(\begin{array}{c} \beta, \gamma, \delta \dots \\ 1, 2, 3 \dots \end{array} \right) \text{ oder } \left(\begin{array}{c} \gamma, \delta, \varepsilon \dots \\ 2, 3, 4 \dots \end{array} \right) \text{ oder } \left(\begin{array}{c} \delta, \varepsilon, \zeta \dots \\ 3, 4, 5 \dots \end{array} \right)$$

u. s. w. bezogen wird, so verlangt man ihre Comple-

xionen, von der Ordnung 1 oder β an, also die ganze Classe; oder von der Ordnung 2 oder γ , oder von der Ordnung 3 oder δ an, u. s. w.; also nur einen Theil dieser Classe. Diesen Theil der Classe giebt die Involution (11) eben so leicht als die ganze Classe.

$$\begin{array}{c|c|c|c} \gamma & \gamma & \gamma & \eta \\ \gamma & \gamma & \delta & \zeta \\ \gamma & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \gamma & \delta & \delta & \varepsilon \\ \delta & \delta & \delta & \delta \end{array} \begin{array}{l} {}^6A \\ {}^8B \\ {}^{10}C \end{array}$$

So wäre für ${}^{12}D$

$$\begin{pmatrix} \gamma, \delta, \varepsilon \dots \\ 2, 3, 4 \dots \end{pmatrix}$$

die erste Complexion der Ordnung 2 oder γ , hier $\gamma \gamma \gamma \eta$, gegeben; und daraus, oder vielmehr aus $\eta = {}^6A$, als *Origine*, werden die übrigen durch Involution hergeleitet. Was also in (9, V) für die Ordnung γ in ${}^{12}D$ mittelbar (durch Ableitung von der ersten, β) geschieht, das geschieht hier unmittelbar (von der ersten Ordnung unabhängig) durch das gegebene Anfangsglied η .

So viel von der so merkwürdigen Classendarstellung und Classenbeziehung in (V, VI).

Verschiedene Classen zu verschiedenen Summen (1, C)

15. Aufgabe. ${}^n + {}^{12}D$, ${}^nE$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \dots & \theta & \iota & \kappa \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ \text{Für } n = 11, \text{ ist} \end{array} \begin{array}{cc} \text{VII} & \text{VIII} \end{array}$$

${}^{12}D$	${}^{11}E$	${}^{12}D$
=	=	=
$\beta \beta \beta \kappa$	$\beta \beta \beta \beta \theta$	$\beta \beta \beta \kappa$
$\beta \beta \gamma \iota$	$\beta \beta \beta \gamma \eta$	$\beta \beta \gamma \iota$
$\beta \beta \delta \theta$	$\beta \beta \beta \delta \zeta$	$\beta \beta \delta \theta$
$\beta \beta \varepsilon \eta$	$\beta \beta \beta \varepsilon \varepsilon$	$\beta \beta \varepsilon \eta$
$\beta \beta \zeta \zeta$	$\beta \beta \gamma \gamma \zeta$	$\beta \beta \zeta \zeta$
= = = =	= = = =	= = = =
(wie in 9)	(wie in 11)	(wie in 9)

VII. Aus ^{12}D zu deriviren ^{11}E Aus ^{12}D derivire man

$$\left\{ \begin{array}{l} ^{11}D (3, II) \\ ^{12}E (5, III) \end{array} \right\} \text{ und daraus } ^{11}E \left\{ \begin{array}{l} 5, III \\ 3, II \end{array} \right\}$$

VIII. Aus ^{11}E zu deriviren ^{12}D Aus ^{11}E derivire man

$$\left\{ \begin{array}{l} ^{12}E (3, I) \\ ^{11}D (5, IV) \end{array} \right\} \text{ und daraus } ^{12}D \left\{ \begin{array}{l} 5, IV \\ 3, I \end{array} \right\}$$

16. Hier muß man immer zwey Derivationen machen, wodurch die Auflösung etwas weitläuftiger wird, als die vorigen (I—VI). Wollte man beyde Derivationen in eine Regel zusammenfassen (wie für III, IV geschehen, und in der Anmerkung zu (5, III) ist erinnert worden), so würde die Regel dafür zu verwickelt werden. Beyde Fälle kommen in der Anwendung selten oder gar nicht vor. Ich will mich also nicht länger dabey aufhalten. Sie sind blos der Verbindung wegen, in welcher sie mit den vorhergehenden stehen (I), hier aufgeführt worden.

17. Es wird (*Calc. des Der. Préf. p. V*) als ein Vorzug der derivativen Regeln für die Entwicklung der Polynomialgrößen gerühmt, daß sie mit den Literalproducten auch zugleich die zugehörigen Zahlencoefficienten geben. Da aber dadurch 1) das combinatorische Gesetz für jene Buchstabencomplexionen unterbrochen, das Verfahren, durch vorher zu treffende Vorbereitungen [no. 43, 47], verwickelter gemacht, und die Aufmerksamkeit zwischen zwey Gegenstände verschiedener Art, zwey combinatorisch-verschiedene Elemente, getheilt wird, 2) die einzelnen Factoren der Zahlen-

coefficienten zerstreut vorkommen, auch die Producte aus ihnen erst reducirt werden müssen, 3) die Zahlencoefficienten der Literalproducte aus leichten Regeln sich ergeben, diese Coefficienten ganz reducirt vorläufig zum künftigen Gebrauch in Tafeln sich aufstellen^{c)}, mehrere derselben auch bey wiederholter Anwendung (und gerade die am häufigsten vorkommenden) sich leicht auswendig behalten lassen: so ist es unstreitig vortheilhafter, die beyden von einander verschiedenen Elemente, nicht mit einander, sondern eins nach dem andern, zu bestimmen (133).

Als Beleg hierzu kann das von ARBOGAST [p. 40] nach [no. 47] ausgeführte Beyspiel dienen, welches alle zu

$$\frac{D^8 \cdot \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \dots 8} = \frac{D \varphi \alpha}{1} a^8 A + \frac{D^2 \varphi \alpha}{1 \cdot 2} b^8 B + \frac{D^3 \varphi \alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} c^8 C + \text{etc.}$$

gehörige Polynomialgrößen enthält. Die Combinationslehre kann auf mehrern Wegen jede dieser Größen,

$$\text{z. B. } \frac{D^4 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = d^8 D \text{ auf den Zeiger}$$

$$\left(\begin{array}{c} \beta, \gamma, \delta \dots \\ 1, 2, 3 \dots 8 \end{array} \right) \text{ bezogen, darstellen:}$$

1) Findet man, wenn man etwa alle Classen brauchte, und $a^8 A$, $b^8 B$, ... hinter einander, aus dem

c) Hierher meine Tafel aller möglichen Literalproducte von 1, 2, 3 ... 10 Factoren, bey denen Wiederholungen verstatet sind, nebst den zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten (*Infin. Dignit. Tab. VI. p. 168, 169*). So leicht auch das Auffinden dieser Zahlen an sich ist, so ist doch das bloße Abscreiben derselben aus jener Tafel noch leichter, und kann wenigstens, wenn viel Factoren vorkommen, zu Prüfung der vorher gefundenen Zahlen dienen.

Anfange $\iota = a^8 A$ nach (7) entwickelte, auch $\delta^8 D$ in seiner Ordnung.

2) Läßt sich $\delta^8 D$ auch unmittelbar darstellen.

$$\delta^8 D \begin{array}{c|c|c|c} 4 & \beta & \beta & \beta \\ \hline 12 & \beta & \beta & \gamma \quad \varepsilon \\ \hline 6 & \beta & \beta & \delta \quad \delta \\ \hline 12 & \beta & \gamma & \gamma \quad \delta \\ \hline 1 & \gamma & \gamma & \gamma \quad \gamma \end{array} \begin{array}{l} 5A \\ 6B \\ 7C \end{array}$$

Denn weil sich $^8 D$ in $^7 C$, $^6 B$ $^5 A$ zerlegen läßt (11): so darf man nur $^5 A = \zeta^2$ als *Origine* der Classe $^8 D$ annehmen, und (auf eine ähnliche Art, wie in 11) daraus

die Ordnung $^6 B$, und daraus die Ordnung $^7 C$, und aus dieser die ganze Classe $^8 D$ ableiten; und hinterher die einzelnen Complexionen mit den zugehörigen numerischen oder Polynomialcoefficienten versehen. Endlich

$$3) \text{ Weil (62) } \frac{D^4 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \delta^8 D = \delta^4 + 4 D, \text{ und}$$

$$\delta^4 + 4 D$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta^2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$=$$

$$4A \beta^3 a^4 A + 4B \beta^2 b^4 B + 4C \beta^1 c^4 C + 4D \beta^0 d^4 D$$

$$\left(\begin{array}{cccc} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta^2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

so kommt

$$\delta^8 D = 4 \beta^3 \zeta^2 + 6 \beta^2 [2 \gamma \varepsilon + \delta^2] + 4 \beta \cdot 3 \gamma^2 \delta + 1 \gamma^4$$

wie bey ARBOGAST [p. 40]. Diese letzte combinatorische Zerlegung giebt also, wie gewöhnlich, die Literalproducte mit den zugehörigen numerischen, Binomial- und Polynomial-coefficienten, zusammen.

18. In diesem Anhang habe ich, aus dem so weitläufigen Felde combinatorischer Veränderungen,

nur die Verbindungen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen, und zwar nach Classen, nicht allgemein lexikographisch geordnet, ausheben, auch von den so mannichfaltig verschiedenen Involutionen nur das Wenige, was oben (in 9, 10, 11, 14) steht, beybringen können. Von lexikographischen und andern involutorischen Anordnungen habe ich in mehrern, im Archiv und den beyden Sammlungen befindlichen, Aufsätzen ausführlich gehandelt; auf welche ich diejenigen Leser, die näher davon unterrichtet seyn wollen, verweisen muß.

ZWEYTER ANHANG

EINIGE DERIVATIVE

UND

COMBINATORISCHE TAFELN.

Tafel I.

Derivativ - und combinatorisch - gezeichnete Polynomialgrößen und ihre Beziehung auf einander

$$\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \zeta x^4 + \eta x^5 \text{ etc.} = p$$

(A) Derivativ ausgedrückte Potenzen von p

$$p = \beta + \frac{D \cdot \beta}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

$$p^2 = \beta^2 + \frac{D \cdot \beta^2}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

$$p^3 = \beta^3 + \frac{D \cdot \beta^3}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

$$p^4 = \beta^4 + \frac{D \cdot \beta^4}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

$$p^5 = \beta^5 + \frac{D \cdot \beta^5}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^5}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta^5}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

$$p^m = \beta^m + \frac{D \cdot \beta^m}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^m}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n} x^n$$

Tafel I. Fortsetzung.

(B) Combinatorisch ausgedrückte Potenzen von p

$$p^1 = a^1 A + a^2 A x + a^3 A x^2 + a^4 A x^3 + \dots + a^{n+1} A x^n$$

$$p^2 = b^2 B + b^3 B x + b^4 B x^2 + b^5 B x^3 + \dots + b^{n+2} B x^n$$

$$p^3 = c^3 C + c^4 C x + c^5 C x^2 + c^6 C x^3 + \dots + c^{n+3} C x^n$$

$$p^4 = d^4 D + d^5 D x + d^6 D x^2 + d^7 D x^3 + \dots + d^{n+4} D x^n$$

$$p^5 = e^5 E + e^6 E x + e^7 E x^2 + e^8 E x^3 + \dots + e^{n+5} E x^n$$

$$, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad ,$$

$$p^m = m^m M + m^{m+1} M x^1 + m^{m+2} M x^2 + \dots \\ \dots + m^{m+n} M x^n$$

(C) Vergleichung der einzelnen Coefficienten in (A, B)
gegen einander

$$\beta = p \kappa 1 = a^1 A = \beta$$

$$\frac{D \cdot \beta^1}{1} = p \kappa 2 = a^2 A = \gamma$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^1}{1 \cdot 2} = p \kappa 3 = a^3 A = \delta$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p \kappa 4 = a^4 A = \epsilon$$

$$, \quad , \quad , \quad ,$$

$$\frac{D^n \cdot \beta^1}{1 \cdot 2 \dots n} = p \kappa (n+1) = a^{n+1} A = \frac{n}{\beta}$$

Tafel I. Fortsetzung.

$$\beta^2 = p^2 \kappa 1 = b^2 B$$

$$\frac{D \cdot \beta^2}{1} = p^2 \kappa 2 = b^3 B$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} = p^2 \kappa 3 = b^4 B$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^2 \kappa 4 = b^5 B$$

, , , ,

$$\frac{D^n \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \dots n} = p^2 \kappa (n+1) = b^{n+2} B$$

$$\beta^3 = p^3 \kappa 1 = c^3 C$$

$$\frac{D \cdot \beta^3}{1} = p^3 \kappa 2 = c^4 C$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2} = p^3 \kappa 3 = c^5 C$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^3 \kappa 4 = c^6 C$$

, , , ,

$$\frac{D^n \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \dots n} = p^3 \kappa (n+1) = c^{n+3} C$$

u. s. w.

$$\left(\begin{array}{cccccc} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \end{array} \right)$$

X

Tafel I. Fortsetzung.

(D) Identische Reductionsformeln

derivative (58, III)

combinatorische (61, 62)

ARBOGASTISCHE

HINDENBURGISCHE

$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}$	$\frac{D^{m+n} M}{m \cdot m+n}$
$\frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n}$	$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \dots \end{array} \right)$
$D \beta^m \cdot \frac{D^{n-1} \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1}$	${}^m A \beta^{m-1} \cdot a^n A$
$+ \frac{D^2 \beta^m}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^{n-2} \cdot \gamma^2}{1 \cdot 2 \dots n-2}$	$+ {}^m B \beta^{m-2} \cdot b^n B$
$+ \frac{D^3 \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^{n-3} \cdot \gamma^3}{1 \cdot 2 \dots n-3}$	$+ {}^m C \beta^{m-3} \cdot c^n C$
$+ \frac{D^n \beta^m}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \gamma^n$	$+ {}^m N \beta^{m-n} \cdot n^n N$

E x e m p e l z u (D)

Für $m=4$ und $n=6$, ist

$\frac{D^6 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\frac{D^{4+6} D}{\dots}$
$\frac{D^6 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\left(\begin{array}{cccc} \beta & \gamma & \delta & \epsilon \dots \end{array} \right)$
$D \beta^4 \cdot \frac{D^5 \cdot \gamma}{1 \cdot 2 \dots 5}$	${}^4 A \beta^3 \cdot a^6 A$
$+ \frac{D^2 \beta^4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{D^4 \cdot \gamma^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$+ {}^4 B \beta^2 \cdot b^6 B$
$+ \frac{D^3 \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{D^3 \cdot \gamma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$+ {}^4 C \beta^1 \cdot c^6 C$
$+ \frac{D^4 \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{D^2 \cdot \gamma^4}{1 \cdot 2}$	$+ {}^4 D \beta^0 \cdot d^6 D$

Dies ist die erste Evolution in γ , des zweyten Exempels in der folgenden Tafel III. Auf eben die Art werden auch die übrigen Evolutionen in δ , ϵ , ζ , η , θ , bis zur letzten ganz reducirt, behandelt; wie aus der angeführten Tafel deutlich zu ersehen ist.

Tafel II.

Verschiedene, arithmographische und lexikographische Darstellungen combinatorischer Deductionen oder Derivationen, die von einem bestimmten Anfange (Origine) ausgehen

I.					II.					III.				
^{12}E														
$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \underline{\quad}$					$\mid \theta \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta$				
$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \gamma \mid \theta \quad 8A$					$\beta \eta \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \gamma$				
$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \delta \mid \eta$					$\gamma \zeta$					$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \beta \mid \delta$				
$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \varepsilon \mid \zeta \quad 9B$					$\delta \varepsilon$					$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \gamma \mid \gamma$				
$\beta \mid \beta \mid \gamma \mid \gamma \mid \eta$					$\beta \beta \zeta \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \beta \mid \beta \mid \varepsilon$				
$\beta \mid \beta \mid \gamma \mid \delta \mid \zeta$					$\beta \gamma \varepsilon$					$\beta \mid \beta \mid \gamma \mid \delta$				
$\beta \mid \beta \mid \gamma \mid \varepsilon \mid \varepsilon$					$\beta \delta \delta$					$\beta \mid \beta \mid \zeta$				
$\beta \mid \beta \mid \delta \mid \delta \mid \varepsilon \quad 10C$					$\gamma \gamma \delta \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \gamma \mid \gamma \mid \gamma$				
$\beta \mid \gamma \mid \gamma \mid \gamma \mid \zeta$					$\beta \beta \beta \varepsilon \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \gamma \mid \varepsilon$				
$\beta \mid \gamma \mid \gamma \mid \delta \mid \varepsilon$					$\beta \beta \gamma \delta$					$\beta \mid \delta \mid \delta$				
$\beta \mid \gamma \mid \delta \mid \delta \mid \delta \quad 11D$					$\beta \gamma \gamma \gamma \quad \text{etc.}$					$\beta \mid \eta$				
$\gamma \mid \gamma \mid \gamma \mid \gamma \mid \varepsilon$					$\beta \beta \beta \beta \delta \quad \text{etc.}$					$\gamma \mid \gamma \mid \delta$				
$\gamma \mid \gamma \mid \gamma \mid \delta \mid \delta$					$\beta \beta \beta \gamma \gamma \quad \text{etc.}$					$\gamma \mid \eta$				
					$\beta \beta \beta \beta \gamma \quad \text{etc.}$					$\delta \mid \varepsilon$				
					$\beta \beta \beta \beta \beta \gamma \quad \text{etc.}$					θ				
					$\beta \beta \beta \beta \beta \beta \quad \text{etc.}$									

($\beta \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon \quad \zeta \quad \eta \quad \theta \quad \iota \quad \kappa$)
 (1 2 3 4 5 6 7 8 9)

Tafel II. Fortsetzung.

IV.		V.
$\beta^{n-1} [\beta]$		β^7
$\beta^{n-2} [\gamma]$		$\beta^5 \gamma$
$\beta^{n-3} [\delta]$		$\beta^3 \gamma^2$
$\beta^{n-4} [\gamma^2, \varepsilon]$		$\beta \gamma^3$
$\beta^{n-5} [\gamma \delta, \zeta]$		$\beta^4 \delta$
$\beta^{n-6} [\gamma^3, \gamma \varepsilon, \delta^2, \eta]$		$\beta^2 \gamma \delta$
$\beta^{n-7} [\gamma^2 \delta, \gamma \zeta, \delta \varepsilon, \theta]$		$\gamma^2 \delta$
$\beta^{n-8} [\gamma^4, \gamma^2 \varepsilon, \gamma \delta^2, \gamma \eta, \delta \zeta, \varepsilon^2, \iota]$		$\beta \delta^2$
$\beta^{n-9} [\gamma^3 \delta, \gamma^2 \zeta, \gamma \delta \varepsilon, \gamma \theta, \delta^3, \delta \eta, \varepsilon \zeta, \kappa]$		$\beta \gamma \varepsilon$
$\beta^{n-10} [\gamma^5, \gamma^3 \varepsilon, \gamma^2 \delta^2, \gamma^2 \eta, \gamma \delta \zeta, \gamma \varepsilon^2, \gamma \iota, \delta^2 \varepsilon, \delta \theta, \varepsilon \eta, \zeta^2, \lambda]$		$\delta \varepsilon$
etc.	etc.	$\beta^2 \zeta$
		$\gamma \zeta$
		$\beta \eta$
		θ

Man vergleiche,

wegen I (Sml. I. S. 187, 188);

wegen II (Sml. I. S. 183. §. 42);

wegen III (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 17);

wegen IV (Sml. I. S. 202, 280, 281; Sml. II. S. 17);

wegen V (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 18).

Tafel III.

Zwey derivativ-evolvirte und vollständig reducirte
ARBOGASTISCHE Beyspiele.

(A) Erstes Schema.

(B) Zweytes Schema.

(Man sehe die grofse Tafel S. 337.)

Nachricht wegen Tafel III.

Diese Tafel, die hier unmittelbar nach Tafel II folgen sollte, läuft zu sehr in die Breite aus, als dafs sie hier hätte Platz finden können. Sie ist daher, auf einem halben Bogen abgedruckt, ganz zu Ende der Schrift, nach Seite 336, geliefert worden, und kann, gehörig zusammen gebrochen, von dem Buchbinder, als Seite 337, eingebunden werden.

Tafel IV. Coefficienten der

Vierter Coefficient des Pro-

ARBOGASTISCHE Darstellung (109. D)	(A)				Variationsinvolution in Zahlen für eine Reihe	(B)				Correspondirende Buchstabeninvolution für mehrere Reihen	(C)			
	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$		$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$
	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{4}$		$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$

Die ARBOGASTISCHE Darstellung (A) ist auch involutorisch, wie die Winkel nachweisen. Zählt man in A und C die Complexionen nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3 . . . 20, von oben herunter, so stimmen die Complexionen

1 in C vorwärts; von der Linken nach der Rechten
20 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

2 in C vorwärts, von der Linken nach der Rechten
19 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

u. s. w. gelesen, vollkommen zusammen. Die Winkel befassen dieselben Buchstaben; nur die Alphabete sind verschieden, worauf bey der Involution nichts ankommt (121). Die Anfänge (*Origines*) von (A) und (C) sind hier $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{d}$.

Producte mehrerer Reihen.

ducts der Reihen s, r, q, p , das ist ${}^{srqp}D(122)$

(D)	(D*)
$Aaad, Aaby, Aac\beta, Aada$ oder $Aa(ad, by, c\beta, d\alpha)$	
$Abay, Abb\beta, Abca$ -	$Ab(a\gamma, b\beta, c\alpha)$
$Aca\beta, Acba$ -	$Ac(a\beta, b\alpha)$
$Adaa$ -	$Ad(a\alpha)$
$Baay, Bab\beta, Baca$ -	$Ba(a\gamma, b\beta, c\alpha)$
$Bba\beta, Bbba$ -	$Bb(a\beta, b\alpha)$
$Bcaa$ -	$Bc(a\alpha)$
$Caab, Cab\alpha$ -	$Ca(a\beta, b\alpha)$
$Cba\alpha$ -	$Cb(a\alpha)$
$Daaa$ -	$Da(a\alpha)$

Hier ist (D), wie im *Nov. Syst. Permutt. p. LXXV*, nach Anfangs- und Endbuchstaben dargestellt. Die Vergleichung mit (C) zeigt deutlich, wie (D) aus (C) folgt, und wie man statt (C) zu entwickeln, sogleich (D) schreiben kann. Dafür braucht man eigentlich bloß die Ordnung A zu schreiben; denn jede nächstfolgende Ordnung läßt sich, hier auf eben die Art wie dort, aus der unmittelbar vorhergehenden, ableiten, z. B. die Ordnung B aus der vorhergefundenen A , und C aus B , und D aus C ; und so in andern Fällen, bey mehrern Ordnungen.

Zugleich rechtfertigen (D) und (D*) die in (123) gezogenen Folgen (I, II) durch den Augenschein, vermöge der figürlichen Anordnung und Zerfällung in Factoren. Aber auch unabhängig von solchen Formen lassen sich diese Formeln, und andere, leicht combinatorisch darthun und erweisen.

Tafel IV. Coefficienten der

Fünfter Coefficient des Pro-

ARBOGASTISCHE Darstellung (112, A)

(E)			
A	a	a	ε
A	a	b	δ
A	b	a	δ
B	a	a	δ
A	a	c	γ
A	b	b	γ
B	a	b	γ
A	c	a	γ
B	b	a	γ
C	a	a	γ
A	a	d	β
A	b	c	β
B	a	c	β
A	c	b	β
B	b	b	β
C	a	b	β
A	d	a	β
B	c	a	β
C	b	a	β
D	a	a	β
A	a	e	α
A	b	d	α
B	a	d	α
A	c	c	α
B	b	c	α
C	a	c	α
A	d	b	α
B	c	b	α
C	b	b	α
D	a	b	α
A	e	a	α
B	d	a	α
C	c	a	α
D	b	a	α
E	a	a	α

Variationsinvolution für eine Reihe (Sml. I. S. 187, 49)

(F)			
α	α	α	ε
α	α	β	δ
α	α	γ	γ
α	α	δ	β
α	α	ε	α
α	β	α	δ
α	β	β	γ
α	β	γ	β
α	β	δ	α
α	γ	α	γ
α	γ	β	β
α	γ	γ	α
α	δ	α	β
α	δ	β	α
α	ε	α	α
β	α	α	δ
β	α	β	γ
β	α	γ	β
β	α	δ	α
β	β	α	γ
β	β	β	β
β	β	γ	α
β	γ	α	β
β	γ	β	α
β	δ	α	α
γ	α	α	γ
γ	α	β	β
γ	α	γ	α
γ	β	α	β
γ	β	β	α
γ	γ	α	α
δ	α	α	β
δ	α	β	α
δ	β	α	α
ε	α	α	α

Correspondirende Combinationsinvolution für mehrere Reihen (280, 281)

(G)			
A	a	a	ε
A	a	b	δ
A	a	c	γ
A	a	d	β
A	a	e	α
A	b	a	δ
A	b	b	γ
A	b	c	β
A	b	d	α
A	c	a	γ
A	c	b	β
A	c	c	α
A	d	a	β
A	d	b	α
A	e	a	α
B	a	a	δ
B	a	b	γ
B	a	c	β
B	a	d	α
B	b	a	γ
B	b	b	β
B	b	c	α
B	c	a	β
B	c	b	α
B	d	a	α
C	a	a	γ
C	a	b	β
C	a	c	α
C	b	a	β
C	b	b	α
C	c	a	α
D	a	a	β
D	a	b	α
D	b	a	α
E	a	a	α

Was (S. 330) von den Complexionen, 1 in C und 20 in A; von 2 in C und 19 in A; u. s. w. erinnert worden ist, gilt hier, von 1 in G und 35 in E; von 2 in G und 34 in E; u. s. w. Die Anfänge (*Origines*) von (E) und (G) sind hier ε und ε .

Producte mehrerer Reihen.

ducts der Reihen p, q, r, s , das ist ${}^{srpq}8D(124)$

(H) Darstellung von ${}^{srpq}D$, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet (S. 331)

(H)				(H*)			
$Ma_{ae}, Mab_d, Mac_y, Mad_{\beta}, Ma_{e\alpha}$	$Ma_{ae}, Mab_d, Mac_y, Mad_{\beta}, Ma_{e\alpha}$	das ist	$Ma(ae, bd, cy, d\beta, e\alpha)$	$Ma(ae, bd, cy, d\beta, e\alpha)$			
$Mbad, Mbb_y, Mcb_{\beta}, Mdb_{\alpha}$	$Mbad, Mbb_y, Mcb_{\beta}, Mdb_{\alpha}$	-	$Mb(ad, by, c\beta, d\alpha)$	$Mb(ad, by, c\beta, d\alpha)$			
$Mcay, Mba_{\beta}, Mea_{\alpha}$	$Mcay, Mba_{\beta}, Mea_{\alpha}$	-	$Mc(ay, b\beta, c\alpha)$	$Mc(ay, b\beta, c\alpha)$			
$Maad, Maby, Mac_{\beta}, Mad_{\alpha}$	$Maad, Maby, Mac_{\beta}, Mad_{\alpha}$	-	$Ma(ad, by, c\beta, d\alpha)$	$Ma(ad, by, c\beta, d\alpha)$			
$Mbay, Mbb_{\beta}, Mcb_{\alpha}$	$Mbay, Mbb_{\beta}, Mcb_{\alpha}$	-	$Mb(ay, b\beta, c\alpha)$	$Mb(ay, b\beta, c\alpha)$			
$Maay, Mab_{\beta}, Mac_{\alpha}$	$Maay, Mab_{\beta}, Mac_{\alpha}$	-	$Ma(ay, b\beta, c\alpha)$	$Ma(ay, b\beta, c\alpha)$			
$Mba_{\beta}, Ma_{a\alpha}, Mb_{a\alpha}$	$Mba_{\beta}, Ma_{a\alpha}, Mb_{a\alpha}$	-	$Mb(a\beta, a\alpha)$	$Mb(a\beta, a\alpha)$			
$Ma_{a\alpha}, Ma_{a\alpha}, Ma_{a\alpha}$	$Ma_{a\alpha}, Ma_{a\alpha}, Ma_{a\alpha}$	-	$Ma(a\alpha)$	$Ma(a\alpha)$			

Man vergleiche S. 331. Die in (H*) nach Ma folgenden, vertical unter einander stehenden $(Mb + Ma)$ und $(Mc + Mb + Ma)$ u. s. w. mit ihren Nebenfactoren, geben die Formel durch lauter zweyte Classen (128. S. 286).

Tafel IV. Fortsetzung.

Coefficienten von Producten gegebener Reihen, durch willkührliche Producte der einzelnen ausgedrückt

Für $p q r s t u v w x y = p . q r . s t u . v w x y$ kämen folgende Reihen (118) mit den überschriebenen Zeigerzahlen

$$\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{\beta} x + \overset{3}{\gamma} x^2 + \overset{4}{\delta} x^3 + \text{etc.} = M$$

$$\overset{r q}{^2 B} + \overset{r q}{^3 B} x + \overset{r q}{^4 B} x^2 + \overset{r q}{^5 B} x^3 + \text{etc.} = N$$

$$\overset{u t s}{^3 C} + \overset{u t s}{^4 C} x + \overset{u t s}{^5 C} x^2 + \overset{u t s}{^6 C} x^3 + \text{etc.} = O$$

$$\overset{y x w v}{^4 D} + \overset{y x w v}{^5 D} x + \overset{y x w v}{^6 D} x^2 + \overset{y x w v}{^7 D} x^3 + \text{etc.} = P$$

Die Reihen N, O, P sind von denen in (115) blos durch die Coefficienten verschieden, so, daß statt der dortigen einzelnen Buchstaben, hier ganze Classen stehen, die also auch bey Formirung des Products M N O P statt jener einfachen Buchstaben zu setzen sind.

Das führt auf Producte von Classen und ihre Involution, wovon bereits in (131) beyläufig Erwähnung geschehen ist. Auf diesem Wege ergeben sich auch die aus der figürlichen Darstellung abgeleiteten Formeln (123, I, II; 124) und andere ähnliche, von aller figürlichen Anordnung unabhängig. Die combinatorischen Veränderungen führen oft auf solche Anordnungen, die nicht selten Veranlassung zu mannichfaltigen Beobachtungen über die Zusammensetzung der Gröſsen aus ihren Elementen geben (*Inf. Dign.* §. X. p. 17, 18, 19 seq). Die daraus abgeleiteten, besonders rein-combinatorischen, Darstellungen befolgen gewöhnlich die einfachsten und leichtesten Gesetze.

*Vergleichung der derivativen und combinatorischen
Entwicklung der Products zweyer oder mehrerer Po-
lynomien in Reihen.*

Diese läßt sich hier, nach dem, was über jede besonders (S. 268 — 275 und S. 276 — 287, und in diesem Anhang Taf. IV) beygebracht worden ist, in der Kürze darstellen. Ein einziges Beyspiel wird darzu schon hinreichend seyn. Ich wähle hier das ARBOGASTISCHE (S. 278):

*Das 5te Glied des Products der dortigen vier Polyno-
mien, oder $\frac{D^4.(Xaaa)}{1.2.3.4}$, unabhängig von den vorher-
gehenden Gliedern zu entwickeln.*

A) Durch analytische Derivationen.

1. Ein Glied des Products dieser Reihen zu entwickeln, muß man die Werthe von $\frac{D^n.(Xaaa.a)}{1.2...n}$

[109. S. 273], von $\frac{D^n.(Xa.a)}{1.2...n}$ [108. S. 272], und

$\frac{D^n.(X.a)}{1.2...n}$ [106. S. 270], vor Augen haben. Die De-

derivirten von einzelnen Buchstaben α , a , a , X , die hierbey mit vorkommen, machen keine Schwierigkeit.

Es ist nähmlich $\frac{D^m.\alpha}{1.2...m} = \alpha$, dem mten Buchstaben

nach α [105. S. 269]; und so auch bey den übrigen Buchstaben a , α , X , und andern.

2. Entwicklung von $\frac{D^4.(Xaaa.a)}{1.2.3.4}$, wo also

$n \text{ (in 1) } = 4$.

I. Vermittelst der Formel für $\frac{D^n.(Xaaa.a)}{1.2...n}$ wird

die gegebene Derivirte von $(Xaaa.a)$ in Derivirte von

$(\mathcal{A}aa)$ und (α) zerlegt. Dies giebt eine erste Entwicklung (S. 275).

II. Durch die Formel für $\frac{D^n.(\mathcal{A}a.a)}{1.2\dots n}$ werden die Derivirten von $(\mathcal{A}a.a)$, die (I) gegeben, weiter in Derivirte von $(\mathcal{A}a)$ und (a) zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (α) in (I), eine zweyte Entwicklung (Ebend.).

III. Durch die Formel für $D^n.(\mathcal{A}.a)$ werden eben so die Derivirten von $(\mathcal{A}a)$, die (II) gegeben, weiter in Derivirte von $(\mathcal{A})$ und (a) zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (a) und (α) aus (II, I), eine dritte Entwicklung (Ebend.).

IV. Die Derivirten in (III), da sie sämmtlich einzelne Buchstaben betreffen, lassen sich augenblicklich auflösen (I), und so giebt die vierte Entwicklung das so genannte *Développement réduit* in Buchstaben (Ebend. der Werth für A, unten).

3. Man kann die Aehnlichkeit nicht verkennen, die das Verfahren (in 2) mit jenen ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Entwicklungen der Polynomialgrößen hat; auch lassen sich die successiven Zerlegungen der Glieder von Producten eben so in einer Tafel darstellen, wie die der Polynomialgrößen bey ARBOGAST [p. 20, 21 und hier Taf. III]. Nur giebt es für die Glieder der Producte weit mehr verschiedene Zerlegungen, als für die Glieder der Potenzen, wo mehrere gleiche durch numerische Coefficienten zusammengenommen werden. Den Gang der Sache tabellarisch vorzulegen, um solchen mit der eben angeführten Tafel vergleichen zu können, will ich die successive Zerlegung einer Derivirten von einer niedrigern Ordnung z. B. $\frac{D^2.(\mathcal{A}aa.\alpha)}{1.2}$ hier nachweisen; auch, zu Verkürzung im Schreiben, die Distanzexponenten dabey mit einführen (I).

Erste Evolution *)	Zweyte Evolu- tion **)	Dritte Evolu- tion †)	Reducirte Evolu- tion ††)
$\frac{D^2 \cdot (Maa \cdot \alpha)}{1 \cdot 2} =$ $\left\{ \begin{aligned} &= Maa \cdot \alpha^2 \\ &+ D^1 \cdot (Maa) \cdot \alpha^1 \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} &= Maa\gamma \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &Maa \cdot a\beta \\ &D^1 \cdot (Ma) \cdot a\beta \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} &= Maa\gamma \\ &+ Maa\beta \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &M \cdot a a \beta \\ &M \cdot a a \beta \end{aligned} \right. \\ &+ Mac\alpha \end{aligned} \right.$	$\left\{ \begin{aligned} &= Maa\gamma \\ &+ Maa\beta \\ &+ Mba\beta \\ &+ Mba\beta \\ &+ Mac\alpha \\ &+ Mbb\alpha \\ &+ Mba\alpha \\ &+ Mca\alpha \\ &+ Mba\alpha \\ &+ Caaa\alpha \end{aligned} \right.$

*) Der gegebenen Derivirten von (Maaα) in Derivirte von Maa und α.

**) Der Derivirten von Maa (1ste Evol.) in Derivirte von Ma und a.

†) Der Derivirten von Ma (2te Evol.) in Derivirte von M und a.

††) Das so genannte *Développement réduit*, wo weiter kein Derivationszeichen oder Distanzexponent vorkommt.

4. Die letzte reducirte Evolution giebt hier die Glieder, wie sie für C (109) stehen, von meiner combinatorischen Darstellung (120) blos in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, verschieden. Man sehe die Bemerkungen zu Taf. IV. (S. 326), wo zugleich die wechselseitige Beziehung beyder Anordnungen nachgewiesen worden ist.

5. Die derivative Entwicklung von $\frac{D^4 \cdot (X a a a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,

wenn man sie von vorhergehenden niedrigeren Derivirten von $X a a a$ unabhängig darstellen soll, wie hier gefordert worden, ist verwickelt, ob sie schon (in 112) von ARBOGAST für leicht ausgegeben wird. Nämlich die Operationen, die man zu machen hat, sind nicht schwer, führen aber gleichwohl (wegen der als Vorbereitung nöthigen Zerlegungen der gege-

benen $\frac{D^4 \cdot (X a a a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, zu Derivirten von $X a a$ und a , und

eben so der Derivirten von $X a a$ zu Derivirten von $X a$ und a) in Weiläufigkeit, wie man (a. a. O. S. 275) ansehen kann. Hierzu kommt noch die Aufmerksamkeit, die man auf die Einschachtelungen (*emboitemens*) zu verwenden hat, die schon (109) sind empfohlen worden, und allerdings zu Verkürzung des Vortrags das ihrige beytragen.

B) Durch ganz einfache Combinationen.

6. Die combinatorische Entwicklung von

$\frac{D^4 \cdot (X a a a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ (Taf. IV, G), deren erstes Glied $X a a a$ ist,

befolgt die (120) gegebene Regel, die ganz allgemein für jede Entwicklung jeder Derivirten gilt. Für hohe Derivirte und viel Buchstaben (d. i. für späte Glieder von Producten mehrerer Reihen) hat man nämlich die Regel nur öfter und weiter anzuwenden, sie bleibt aber immer in ihren Vorschriften einfach und in der Anwen-

ung leicht. Man hat nur mehr zu schreiben, weil das Ganze mehr Glieder hat; das Verfahren bleibt aber durchaus sich immer gleichförmig. Man hat nichts dabey, blos etwa als Vorbereitung zu schreiben, die nur dazu diene, die Entwicklung daraus abzuleiten (5); was man schreibt, gehört unmittelbar zur Sache selbst und macht einen Theil des Ganzen aus. Das Verfahren ist zum Theil stelegraphisch, und stellt die Glieder in lexikographischer Ordnung auf. Die gezogenen Winkel, bey diesen involutorischen Anordnungen, dieneu, aufer der leichtern Ausübung der Regel, auch noch dazu: einmal, die Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. der weniger zusammengesetzten Glieder aus weniger Reihen, als Evolutionen sogleich abzusondern und auszuheben; und dann auch, um die gemeinschaftlichen Factoren, die sich hier von selbst ergeben, sogleich zu übersehen, wofür (109) die Aufmerksamkeit auf die *Emboîtemens* empfohlen worden.

7. Das combinatorische Verfahren in (B) ist dem derivativen in (A) gerade entgegengesetzt. Das letztere geht, von mehrbuchstäbigen Derivirten und ihren Zerlegungen, auf die Zerlegungen der successive wenigerbuchstäbigen Derivirten fort; das erstere setzt aus der zuerst gegebenen Union, die Bionen, aus diesen die Ternionen, aus diesen die Quaternionen u. s. w. von immer mehrern und mehrern Reiheneuchstaben, zusammen. Man wird keinen Augenblick anstehen, die combinatorisch-synthetische Auflösung (B), als die leichtere, der derivativ-analytischen (A) vorzuziehen. Vertauscht man in der reducirten Evolution der tabellarischen Vorstellung (3) die Alphabete α, a, a, A mit $A a a \alpha$ und liest die so umgeformten Complexionen rückwärts von unten herauf, so hat man, aus der derivativen Darstellung der Glieder, auf einmal die stelegraphisch-lexikographische Anordnung (120 und Taf. IV.). Die Umtauschung ist nur nöthig,

wenn die Anfangscomplexion (wie in 120) $\mathcal{A} a a \gamma$ seyn soll, sonst besteht auch die lezikographisch-combinatorische Darstellung, ohne jene Umtauschung, aber für die Anfangscomplexion $\alpha a a \mathcal{E}$ (Ebend.), die man eben so gut als $\mathcal{A} a a \gamma$ zur Anfangscomplexion für das verlangte Glied hätte nehmen können.

So lassen sich auch, auf dergleichen Producte oder Potenzen der Reihen und ihre Glieder sich beziehende, zusammengesetztere derivative Functional-Ausdrücke und Sätze [*Calc. des Der.* p. 46 — 68; 78 — 89] durch combinatorische Zeichnung in ihrer Entwicklung sehr erleichtern; die Auflösung von Aufgaben hingegen, deren Inhalt so ganz offenbar combinatorisch ist, wie die [a. a. O. no. 93] auf directen combinatorischen Wegen zugleich beträchtlich abkürzen. Die dort angebrachte für merkwürdig angegebene derivative Bezeichnung führt doch zu Weitläufigkeiten, von denen die kurze, der Natur der Aufgabe angemessene, combinatorische Behandlung nichts weis. Auch wird man, bey etwas verwickelten Aufgaben und ihrer derivativen Behandlung, bestätigt finden, was ich bey einer andern Gelegenheit anderwärts schon erinnert habe, daß man nämlich bey derivativen Vorschriften, die man nicht immer auszuüben Veranlassung hat, sehr oft einen grossen Theil des Vorhergehenden aufmerksam überlesen muß, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall schreiten kann. Mit den combinatorischen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwicklung man bald übersieht, und wenn man sie vergessen hätte, durch Nachlesung weniger Zeilen sich wieder erneuert, ist das nicht der Fall.

ARBOGASTISC

Polynomialgrößen

4te Evolution,

$$D \cdot \zeta^2$$

$$\frac{\beta^4}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \gamma^2 \\ + \frac{D^2}{1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\beta^4}{2 \cdot 3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \gamma^3 \\ + \frac{D^2}{1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\beta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot D \gamma$$

Polynomialgrößen

4te Evolution

$$\frac{D^2 \cdot \zeta^2}{1 \cdot 2}$$

$$\frac{\beta^4}{2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \gamma^2 \\ + \frac{D^2}{1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\beta^4}{2 \cdot 3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \\ + \\ + \end{array} \right.$$

$$\frac{\beta^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left\{ \begin{array}{l} D \\ + \end{array} \right.$$

Die 6ste h

The following table shows the results of the experiments conducted on the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th, 7th, 8th, 9th, 10th, 11th, 12th, 13th, 14th, 15th, 16th, 17th, 18th, 19th, 20th, 21st, 22nd, 23rd, 24th, 25th, 26th, 27th, 28th, 29th, 30th, 31st, 32nd, 33rd, 34th, 35th, 36th, 37th, 38th, 39th, 40th, 41st, 42nd, 43rd, 44th, 45th, 46th, 47th, 48th, 49th, 50th, 51st, 52nd, 53rd, 54th, 55th, 56th, 57th, 58th, 59th, 60th, 61st, 62nd, 63rd, 64th, 65th, 66th, 67th, 68th, 69th, 70th, 71st, 72nd, 73rd, 74th, 75th, 76th, 77th, 78th, 79th, 80th, 81st, 82nd, 83rd, 84th, 85th, 86th, 87th, 88th, 89th, 90th, 91st, 92nd, 93rd, 94th, 95th, 96th, 97th, 98th, 99th, 100th.

L'auteur de la partie française n'ayant pu surveiller la correction il s'y est glissé des fautes, dont voici les plus graves.

Pag. 5 ligne 12 de bas en haut, attaque, lisez attaquas
 — 7 — 14 idem des, — les
 — 11 — 17 idem pleindre, — plaindre
 — 15 — 10 idem $z \Delta x^m . \Delta x^n$, — $z \Delta x^m . \Delta y^n$
 — 17 ligne dernière

$\frac{x^n}{a +} \frac{x^n}{b +} \frac{x^n}{c +}$ etc. lisez $\frac{x^m}{a +} \frac{x^n}{b +} \frac{x^r}{c +}$ etc.
 — 23 ligne 13 inhérens, lisez incohérens
 — 24 — 16 de b. en h. le, — les
 — 11 idem connus, — inconnus
 — 30 — 11 idem des, — de
 — 48 — 5 idem

$\frac{x}{A +} \frac{x}{B +} \frac{x}{C +}$ lisez $\frac{x}{A +} \frac{x-1}{B +} \frac{x-2}{C +}$
 — 50 ligne 5 de b. en h. des, lisez de
 — 52 — 11 qu', — qui
 — 55 — 4 de b. en h. et de, — et l'expédient de
 — 56 — 11 différentiel, — différenciée
 — 62 — 7 de b. en h. un d', — un
 — 70 — 9 idem souvent, — souvent
 — 82 — 12 idem adopté, — adoptée
 — 92 — 10 jusques et compris 15. Pour corriger le

déplacement, lisez $= 1 + \frac{q}{X} + \frac{q}{X^2} + \frac{q}{X^3} + \dots$,
 d'où l'on tire en mettant les séries de
 $\frac{q}{X}$, $\frac{q}{X^2}$, etc., et comparant

— 101 — 12 qu', lisez qui
 — 128 — 10 complications, — complication
 — 129 — 13 J'euse, — J'eusse

Je ne m'arrête pas aux accens, ni aux moindres fautes.

Zu den deutschen Anmerkungen und der darauf folgenden Abhandlung.

Seite 137, Zeile 13, von unten, statt *Polynomiorum per Series*, lies *Polynomiorum Evolutionem per Series*

S. 141, Note, Z. 3, v. u. st. Zahlencolonne, l. Zahlen-
colonnen

— 147, Z. 23, 24, st. au- eine, l. auf eine

Ebend. Z. 34, 35, st. verrschiedenen, l. verschieden

S. 153, Z. 4, v. u. st. combinatorischen, l. combinatorische

— 154, Z. 21, st. erleichtert Der *locus*, l. erleichtert. Der
locus

— 159, Z. 3, v. u. st. 2 4 18 6 . . . , l. 2, 4, 8, 16 . . .

— 160, Z. 3, v. u. st. $n - 4$, l. $n - 4$, und

— 162, Z. 17, st. $n - 4$, l. $n - 4'$

— 181, Z. 2, v. u. st. $D.F\alpha. = D.\alpha$, l. $D.F\alpha.D.\alpha$

— 184, Z. 6, v. u. st. $D^2.\varphi a$, l. $D^2\varphi a$

— 187, Z. 3, st. $1.2.3\delta$, l. $1.2.3\delta$

— 190, Z. 2, st. $D.\varphi a$, l. $D.\varphi\alpha$,

— 193, Z. 10, nach $\frac{m.m-1}{1.2}$, fehlt α^{m-2}

— 201, Z. 3, v. u. st. $\alpha - \zeta$, l. $\alpha - \zeta$

— 219, Z. 4, v. u. st. $\left(\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2\dots n}\right) = \frac{D\varphi\alpha}{1}$

$$\left(\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2\dots n}\right)x^n = \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\right)$$

— 231, Z. 1, v. u. st. $\left(\begin{smallmatrix}\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\dots\\1, 3, 3, 4\dots\end{smallmatrix}\right)$ l. $\left(\begin{smallmatrix}\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\dots\\1, 2, 3, 4\dots\end{smallmatrix}\right)$

— 235, Z. 12, st. $5\beta^2.[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon]$, l. $6.\beta^2[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon]$

Ebend. Z. 13. st. $+ \gamma^3\delta$, l. $+ 4\gamma^3\delta$

S. 237, Z. 7, v. u. st. $\alpha, \beta, \gamma\dots$, l. $\alpha, \beta, \gamma\dots\theta$

Ebend. Z. 20, st. derivaiive, l. derivative

S. 259, Z. 4, und S. 360, Z. 2, v. u. sollten statt der ge-
radestehenden II, schiefliegende gesetzt
seyn, dergleichen aber in der Drucke-
rey nicht vorhanden waren.

— 267, Z. 10, st. $q^s + s\kappa(n+1)$, l. $q^f + s\kappa(n+1)$

Ebend. Z. 15, st. der unendlichen, l. der endlichen

S. 273, Z. 5, st. $D.(Aaa)$, l. $D.(Aaa)$

— 275, Z. 5, v. u. st. Aa l. Ba . und Z. 4, v. u. st. ad , l. Ad

— 284, Z. 14, st. gezahlt, l. gezählt

Im Bogen T sind aus Versehen, von Seite 295 an bis
mit Seite 304, die schiefstehenden Varia-
tionsclassenbuchstaben $A, B, C, D, E, F\dots$
 $M\dots P, Q$ statt der geradestehenden Combina-
tionsclassenbuchstaben $A, B, C, D, E, F\dots M\dots P,$
 Q gesetzt worden.

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header, including the word "Handwritten" and "18".

Handwritten text in the middle section of the page, appearing to be a list or series of entries.

Handwritten text in the lower middle section, including a list of items and a paragraph of text.

Handwritten text at the bottom of the page, including a list of items and a paragraph of text.

Hindenburg, Carl Friedrich, 1741-1808

Über combinatorische Analysis und Derivations-Calcul einige Fragmente

Leipzig 1803

Bibl.Mont. 3656

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723362-5